UNIVERSITEIT TWENTE

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica

Tentamen Mathematics C1 Cayley op maandag 29 mei 2017, 18:15-20:15 uur

---

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden. Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!

Er is geen formuleblad toegestaan en ook een rekenmachine is NIET toegestaan.

---

1. De matrices A, B en C en de vectoren $\mathbf{b}_1$ en $\mathbf{b}_2$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

   a) Bepaal de oplossingsverzameling van het stelsel $C\mathbf{v} = \mathbf{b}_2$ en schrijf deze in parametrische vectorvorm.

   b) Bepaal alle $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ die voldoen aan zowel $C\mathbf{v} = \mathbf{b}_2$ als $A\mathbf{u} + B\mathbf{v} = \mathbf{b}_1$.

   c) Bepaal alle $\mathbf{u}$ waarvoor er een $\mathbf{v}$ bestaat zodanig dat aan zowel $C\mathbf{v} = \mathbf{b}_2$ als $A\mathbf{u} + B\mathbf{v} = \mathbf{b}_1$ is voldaan.

2. Gegeven is dat $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eigenwaarden -1, 1 en 2 heeft met, respectievelijk, eigenvectoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Beargumenteer of de matrix A wel of niet inverteerbaar is.

3. De matrix A is gegeven door:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + 5 & 1 - \alpha & 0 \\ -\alpha - 1 & \alpha + 3 & 0 \\ -2\alpha & -2\alpha & 4 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

   met $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Laat zien voor welke waarde(n) van α de matrix A een eigenwaarde 1 heeft.

   b) Kies $\alpha = 0$. Laat zien dat A een eigenwaarde 4 heeft en bepaal de bijbehorende eigenruimte.

   c) Kies $\alpha = 0$. Bepaal alle (mogelijk complexe) eigenwaarden van A.

z.o.z.

Tentamen Mathematics C1 Cayley op maandag 29 mei 2017, 18:15-20:15 uur.

---

4. Gegeven zijn de matrices A en B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   Bepaal een matrix C zodanig dat $CA = B$.

5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding die elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ eerst roteert over 90 graden (tegen de klok in) en daarna spiegelt in de lijn $y = x$.

   a) Bepaal de representatie matrix van T.

   b) Beargumenteer of T inverteerbaar is.

6. Gegeven zijn de vectoren $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Toon aan dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ een basis vormt voor Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

   b) Bepaal $[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}}$.

7. Bepaal het volume van het parallellepipedum met hoekpunten $(1, 0, 0)$, $(1, -2, 2)$, $(-4, 0, -4)$ en $(-2, 0, -4)$.

Voor de vraagstukken kunnen de volgende aantallen punten worden behaald:

Vraagstuk	1.	6 punten	Vraagstuk	2.	3 punten	Vraagstuk	3.	6 punten
Vraagstuk	4.	4 punten	Vraagstuk	5.	6 punten	Vraagstuk	6.	6 punten
Vraagstuk	7.	5 punten						

Het cijfer wordt bepaald door bij het totaal der behaalde punten 4 punten op te tellen en door 4 te delen.

UNIVERSITY OF TWENTE
Department of Electrical Engineering, Mathematics and Computer Science

Exam Mathematics C1 Cayley on Monday May 29, 2017, 18.15 – 20.15 hours.

The solutions of the exercises should be clearly formulated. Moreover, in all cases you should motivate your answer!

You are **not** allowed to use a formula sheet and you are **not** allowed to use a calculator.

---

1. The matrices A, B and C and the vectors $\mathbf{b}_1$ and $\mathbf{b}_2$ are given by:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

   a) Determine the solution set of the system $C\mathbf{v} = \mathbf{b}_2$ and write it in parametric vector form.

   b) Determine all $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ which satisfy both $C\mathbf{v} = \mathbf{b}_2$ as well as $A\mathbf{u} + B\mathbf{v} = \mathbf{b}_1$.

   c) Determine all $\mathbf{u}$ for which there exists a $\mathbf{v}$ such that both $C\mathbf{v} = \mathbf{b}_2$ as well as $A\mathbf{u} + B\mathbf{v} = \mathbf{b}_1$ are satisfied.

2. Given is that $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ has eigenvalues -1, 1 and 2 with corresponding eigenvectors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Argue whether or not the matrix A is invertible.

3. The matrix A is given by:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha + 5 & 1 - \alpha & 0 \\ -\alpha - 1 & \alpha + 3 & 0 \\ -2\alpha & -2\alpha & 4 - 2\alpha \end{pmatrix}$$

   with $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Determine for which value(s) of α the matrix A has an eigenvalue 1.

   b) Let $\alpha = 0$. Show that A has eigenvalue 4 and determine the associated eigenspace.

   c) Let $\alpha = 0$. Determine all (possibly complex) eigenvalues of A.

see reverse side

Exam Mathematics C1 Cayley on Monday May 29, 2017, 18.15 - 20.15 hours.

---

4. Given are the matrices A and B:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

   Determine a matrix C such that $CA = B$.

5. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is the linear transformation which first rotates each point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ over 90 degrees (counterclockwise) and next mirrors the result in the line $y = x$.

   a) Determine the representation matrix of T.

   b) Argue whether or not T is invertible.

6. Given are the vectors $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ and $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   a) Show that $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ forms a basis for Span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

   b) Determine $[\mathbf{v}_3]_{\mathcal{B}}$.

7. Determine the volume of the parallelepipid with vertices $(1,0,0)$, $(1,-2,2)$, $(-4,0,-4)$ and $(-2,0,-4)$.

For the exercises the following number of points can be obtained:

Exercise	1.	6 points	Exercise	2.	3 points	Exercise	3.	6 points
Exercise	4.	4 points	Exercise	5.	6 points	Exercise	6.	6 points
Exercise	7.	5 points						

The grade is determined by adding 4 points to the total number of points obtained and dividing by 4.