Uitwerking **Tentamen Kansrekening en Statistiek (153008) voor INF en TEL donderdag 8 april 2010**

Opgave 1
Dit is niet waar:
- A en B sluiten elkaar uit als P(AB) = 0
- A en B zijn onafhankelijk als P(AB) = P(A)P(B)
Dit kan allebei het geval zijn als P(A) = 0 of als P(B) = 0

Opgave 2

a. $P(L = l) = (1-p)^{l-1}\,p$ en $P(L = 1) = p = 0.1$
Dus $E(L) = 1/p = 10$ en
$P(L > 4) = (1-p)^4 = 0.9^4 = 65.61\%$

b. $P(B = 1000) = P(L = 1) = 0.1$
$P(B = 500) = P(L = 2) = 0.9\times0.1 = 0.09$
$P(B = 250) = P(L = 3) + P(L=4) = 0.9^2\times0.1 + 0.9^3\times0.1 = 0.1539$
$P(B = 0) = P(L > 4) = 0.9^4 = 0.6561$
$E(B) = \sum b\, P(B = b) = 1000\times0.1 + 500\times0.09 + 250\times0.1539 + 0\times0.6561 = 183.48$ Euro

Opgave 3

a. X en Y zijn onderling onafhankelijk en beide Poisson verdeeld met parameter $\mu = 2$, dus ook X+Y is Poisson verdeeld met $\mu = 2+2$: $P(X+Y = 3) = \frac{4^3}{3!}e^{-4} \approx 0.195$
(eventueel via de convolutiesom: $P(X+Y=3) = \sum_{i=0}^{3} P(X=i)P(Y=3-i) = \cdots = 0.195$)

b. $P(X = 0 \mid X+Y = 3) = \frac{P(X=0\ en\ X+Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{P(X=0\ en\ Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{P(X=0)P(Y=3)}{P(X+Y=3)} = \frac{\frac{2^0}{0!}e^{-2}\times\frac{2^3}{3!}e^{-2}}{\frac{4^3}{3!}e^{-4}\approx} = \frac{2^3}{4^3} = \frac{1}{8}$

c. Analoog aan b vinden we :

x	0	1	2	3	som
P(X = x| X+Y = 3)	1/8	3/8	3/8	1/8	1

(ofwel: X is, gegeven X+Y=3, B(3, ½) -verdeeld)

d. $E(X \mid X+Y = 3) = 1.5$ symmetrie).

Opgave 4

a. $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_0^1 (x+y)dy = \left[xy + \frac{1}{2}x^2\right]_{y=0}^{y=1} = x + \frac{1}{2}$, *voor* $0 \le x \le 1$

b. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})dy = \left[\frac{1}{3}x^3 y + \frac{1}{4}x^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2(x+\frac{1}{2})dy = \left[\frac{1}{4}x^4 y + \frac{1}{6}x^3\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$

$var(X) = E(X^2) - E(X)^2) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$

c. $E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dy = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdyx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}x^3 y + \frac{1}{2}x^2 y^2\right]_{x=0}^{x=1} dy$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{2}y^2\right]dy = \left[\frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^3\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{3}$$

d. X en Y hebben dezelfde verdeling, dus E(X) = E(Y) = 7/12 en var(X) = var(Y) = 11/44

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{E(XY) - EX\cdot EY}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2}{\frac{11}{144}} = -\frac{1}{11}$$

“*X* en *Y* zijn licht negatief gecorreleerd”

e. X en Y zijn afhankelijk, want de correlatiecoëfficiënt is niet gelijk aan 0
(of: X en Y zijn niet o.o., want $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ voor alle x en y, bijv als x = y = ¼ dan ½ ≠ ¾ × ¾)

Opgave 5

a. Model: Zij X het aantal toekomstige klanten bij het nieuwe tariefsysteem onder de groep van n willekeurig gekozen personen. $X \sim B(n, p)$.
Een zuivere schatter van p is X/n ($E(X/n) = p$)

b. Omdat deze schatter zuiver is, is de verwachte kwadratische fout gelijk aan de variantie,
dus: $\mathrm{var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\mathrm{var}(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$.

c. Formule: $\left(\hat{p} - c\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}, \hat{p} + c\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right)$.

Hierin is $\mathbf{\hat{p} = \frac{33}{150} = 0.22, n = 150, c = 1.96}$ uit de N(0,1)-tabel zodat $P(Z \leq c) = 0.975$.

Dit levert op: $(0.22 - 1.96 \times \sqrt{0.22 \times 0.78/150}$, $0.22 + 1.96 \times \sqrt{0.22 \times 0.78/150}$) = (0.154, 0.286)

Opgave 6

a. (voer de 12 waarden in de rekenmachine in en druk de juiste knoppen in):
$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = 6.45$ en $s = \sqrt{\frac{1}{12-1}\sum_{i=1}^{12}(x_i - \bar{x})^2} \approx 1.08$

b. 1. Model: de scores $X_1, \ldots, X_{12}$ zijn onafhankelijk en normaal verdeeld met onbekende μ en onbekende σ
(We voeren dus de t-toets op μ uit)

2. Toets $H_0: \mu = 6.9$ tegen $H_a: \mu < 6.9$ met $\alpha = 0.05$

3. Toetsingsgrootheid $T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 6.9}{S/\sqrt{12}}$ is: t_{11}-verdeeld als $H_0: \mu = 6.9$ waar is

4. Het is een linkseenzijdige toets, dus deze luidt: "**als $t \leq$ -1.80, dan H_0 verwerpen**",
want uit de t_{11}-tabel volgt bij kans 0.95: c = -1.80 (omdat wegens symmetrie $P(T_{11} \leq c) = P(T_{11} \geq -c)$)

5. Waargenomen t $= \frac{6.45 - 6.9}{1.08/\sqrt{12}} \approx -1.44$

6. Statistische beslissing: z = -1.42 > -1.80 = c, dus H_0 ***niet*** verwerpen

7. Conclusie: bij een onbetrouwbaarheid van 5% is er onvoldoende statistisch bewijs voor de bewering dat de tevredenheid onder het personeel is afgenomen.

Alternatief voor 4. en 6. is het bepalen van de overschrijdingskans $P(T_{11} \leq -1.44)$: de overschrijdingskans $P(T_{11} \leq -1.44)$ ligt tussen 5% en 10%, dus de ***overschrijdingskans*** *> α = 0.05 → H_0* ***niet*** *verwerpen)*