

## Tentamen Deterministische Modellen in de OR (191580752)

Maandag 15 april 2013 van 8.45 – 11.45 uur

### Opmerkingen vooraf:

1. Het gebruik van boeken, syllabi, rekenmachines en/of aantekeningen is **niet** toegestaan bij dit tentamen.
2. De score voor dit tentamen is gelijk aan (aantal behaalde punten+4)/4. Het eindcijfer wordt bepaald door afronding of door afronding na verrekening van deze score met de tijdens de oefencolleges behaalde scores.
3. **Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd en waar nodig van een berekening te worden voorzien.**

### Opgave 1 (6 punten)

Beschouw het volgende LP-probleem:

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad \max z &= x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\
 \text{o.v.w.} \quad &3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 10 \\
 &x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 7 \\
 &x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Het oplossen van (P) met de simplexmethode levert het volgende eindtableau op:

z	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	s <sub>1</sub>	e <sub>2</sub>	a <sub>2</sub>	RHS	BV
1	11	8	5	0	4	0	0	40	z
0	2	2	1	0	1	1	-1	3	e <sub>2</sub>
0	3	4	2	1	1	0	0	10	x <sub>4</sub>

Bij het beantwoorden van onderstaande vragen mag je de volgende formules gebruiken:

z	BV	NBV	RHS
1	0	$c_{BV}B^{-1}N - c_{NBV}$	$c_{BV}B^{-1}b$
0 <sub>m</sub>	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

- a) Bepaal  $c_{BV}$ ,  $B^{-1}$ ,  $b$  en controleer dat  $c_{BV}B^{-1}b = 40$ .
- b) Voor welke waarden van de kostencoefficiënt  $c_4$  van  $x_4$  blijft de basis uit het eindtableau optimaal? Wat wordt in dat geval de doelfunctiewaarde?
- c) Voor welke waarden van  $\alpha$  blijft de huidige basis optimaal als het rechterlid  $b$  gelijk wordt aan  $b = (10 - 2\alpha \quad 7 + \alpha)^T$ ? Bepaal voor die waarden van  $\alpha$  de waarde van de basisvariabelen en de doelfunctiewaarde.
- d) Geef een definitie van het begrip schaduwprijs. Wat is de schaduwprijs van restrictie 1? Waarom is de schaduwprijs van een  $\leq$ -restrictie altijd niet-negatief?

**Opgave 2 (7 punten)**

In een machinefabriek wordt dagelijks een planning gemaakt voor de productie van de volgende dag. Morgen moeten 5 jobs worden afgehandeld. De bewerkingstijd van een job is afhankelijk van de machine waarop de job wordt bewerkt. Zodra een machine wordt gebruikt, is er een bepaalde setuptijd nodig. (N.B. Als er 2 of meer jobs worden bewerkt op dezelfde machine, dan is er maar 1x sprake van setuptijd.) Niet alle jobs kunnen op alle machines worden bewerkt (aangegeven door een X in onderstaande tabel met bewerkingstijd- en setuptijden).

	Job 1	2	3	4	5	Setuptijd
Machine 1	42	70	93	X	X	30
2	X	85	45	41	67	40
3	58	X	X	37	72	50
4	58	X	55	X	38	60
5	X	60	X	54	X	20

Bij de toewijzing van jobs aan machines moet verder rekening worden gehouden met de volgende eisen:

- Als machine 3 gebruikt wordt, dan moet machine 5 ook gebruikt worden;
- Er moeten dagelijks (dus ook morgen) tenminste 3 machines ingezet worden.

Doel van de toewijzing/planning is om de som van setup- en bewerkingstijden nodig om alle jobs te verwerken, te minimaliseren.

Formuleer het bovenstaande planningsprobleem als een ILP-probleem. Geef hierbij duidelijke definities van de beslissingsvariabelen en geef korte verklaringen voor de randvoorwaarden.

**Opgave 3 (9 punten)**

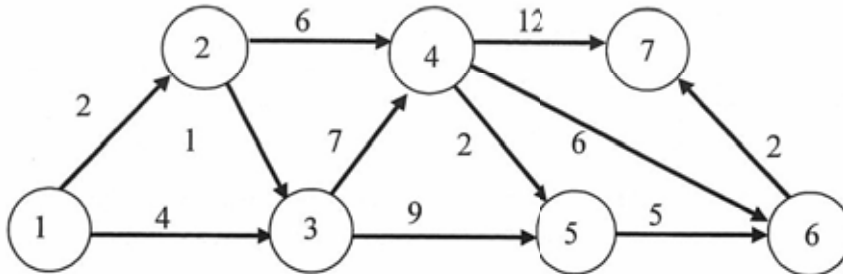
Beschouw het volgende LP probleem:

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad \max z = & \quad 3/2x_1 \quad - \quad 4x_2 \quad + \quad 5/2x_3 \quad + \quad x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & \quad 3x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad 3x_3 \quad + \quad 2x_4 \leq 30 \\
 & \quad x_1 \quad + \quad 2x_2 \quad - \quad x_3 \quad - \quad x_4 \geq 10 \\
 & \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad - \quad 2x_3 \leq 12 \\
 & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

- a) Bepaal het duale probleem (D) van (P).
- b) Bepaal een optimale oplossing voor (P) m.b.v. de tweefasen simplexmethode. Geef bij de optimale oplossing duidelijk aan wat de waarden van  $z$ ,  $x_1 \dots x_4$  zijn.
- c) Bestaat er een alternatieve optimale oplossing voor (P)? Zo ja, bepaal deze. Zo niet, waarom niet?
- d) Geef de oplossing van (D) en leg kort uit hoe je deze hebt bepaald.

**Opgave 4 (6 punten)**

- a) Gegeven is het onderstaande gerichte netwerk. De lengte (in km's) van de pijlen is gegeven in de figuur. Bepaal m.b.v. het algoritme van Dijkstra de kortste afstand van punt 1 naar punt 7. (N.B. De afstand van knoop 2 tot knoop 3 is 1 km.)



- b) Beschouw het netwerk in opgave a). Vervang de pijlen door verbindingen. Bepaal de minimale opspannende boom, uitgaande van knoop 4.
- c) ING wil haar IT-systemen voor het verwerken van elektronische betalingen laten doorlichten door een gespecialiseerd bedrijf. Hiervoor moeten activiteiten A t/m G uitgevoerd worden. De tijdsduur van de verschillende activiteiten (in dagen) en de (directe) voorgangers van de verschillende activiteiten staan in de volgende tabel.

Activiteit	Voorganger(s)	Tijdsduur (in dagen)
A	-	9
B	-	5
C	-	10
D	B	3
E	A, D	3
F	C	3
G	E, F	8

- Teken een AoA (*Activity-on-Arc*)-diagram van dit project
- Bepaal voor elke knoop ET en LT (*early en late event time*).
- Bepaal voor elke activiteit de TF (*total float*) en bepaal het kritieke pad en de totale lengte van het project.
- Veronderstel dat het project afgerond moet zijn binnen 18 <sup>dagen</sup> weken. Is dit mogelijk als alleen activiteiten B en C ingekort kunnen worden met elk maximaal 4 <sup>dagen</sup> weken?

**Opgave 5 (8 punten)**

Om de banden aan te halen met het lokale bedrijfsleven en deze bedrijven een extra platform te geven om zich te presenteren aan studenten van de UT, heeft Stress besloten om eind 2013 een groot congres te organiseren over het thema "Innovatie in Twente". Uiteraard is dit een duur project en Stress gaat op zoek naar financiële bijdragen van het Twentse bedrijfsleven. Er zijn een heleboel vrijwilligers om mee te werken aan de *fundraising* in heel Twente, maar in deze

opgave beperken we ons tot 8 vrijwilligers en tot bedrijven in de gemeentes Almelo, Hengelo en Enschede. De geschatte opbrengst (in euro's) bij het inzetten van een bepaald aantal vrijwilligers in elk van de gemeentes staat in de volgende tabel. In elk van de gemeentes worden niet meer dan 6 vrijwilligers ingezet.

	0	1	2	3	4	5	6
Almelo	0	30	60	120	180	300	500
Hengelo	0	50	120	190	250	350	500
Enschede	0	200	350	450	550	600	650

Doel is om de vrijwilligers zo in te zetten dat de opbrengst van de *fundraising* maximaal is. Formuleer een DP-probleem waarmee de onderneming deze maximale opbrengst in de 3 steden kan bepalen.

Definieer hiertoe

- fasen
- toestanden
- beslissingen
- kostenfunctie
- recurrente betrekking voor de kostenfunctie

Bepaal de optimale oplossing voor het geformuleerde probleem door de recurrente betrekking stap voor stap achterwaarts door te rekenen. Wat verandert er aan de optimale oplossing indien als extra eis geldt dat in elk van de gemeentes tenminste 1 vrijwilliger moet worden ingezet?