A 85
HC3

$g \in G$ $|g|$ orde kleinste $k \geq$ zdd $g^k = e$

als zo een k niet bestaat, dan $|g| = \infty$

bv: $G = \mathbb{Z}$ $g^k = \underbrace{g+g+\dots+g}_{k*}$ $z+z+z+\dots+z \neq 0 \Rightarrow |z| = \infty$

Vbd: $G = (\mathbb{Z}_n, +)$: $k \in \mathbb{Z}_n$ $|k| = kgv(k,n)/k$

in $\mathbb{Z}_6$: $|2| = 3$, $|4| = 3$, $|k| = kgv(k,6)/k$

Vbd: $G = \mathbb{Z}$ $H = 2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Eigenschap: (i) H gesloten onder optelling

(ii) $k \in H \Rightarrow -k \in H$

(i)+(ii) $\Rightarrow 0 \in H$

ook: $k_1 + (k_2 + k_3) = (k_1 + k_2) + k_3$

$k_1, k_2, k_3 \in H \subset G$

dus H is groep

H heet ondergroep van G

$J = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

- J niet gesloten onder optelling
- $k \in J \Rightarrow -k \in J$

J associatief

$0 \notin J$

J is geen groep

$(G, *)$ groep, en $H \subset G$ $(G \subset G)$

H heet ondergroep, indien $(H, *)$ groep is

Stelling: $\emptyset \neq H \subset G$ is ondergroep van G

$\Leftrightarrow$ • H gesloten onder $*$

• $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$

Bewijs: $\Rightarrow$ evident

$\Leftarrow$ kies $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H \Rightarrow (h \cdot h^{-1} = e) \in H$

associativiteit volgt uit G, dus H is groep

Stelling: $\emptyset \neq H \subset G$, dan H ondergroep $\Leftrightarrow \forall a, b \in H: ab^{-1} \in H$

Bewijs: $\Rightarrow$ evident

$\Leftarrow$ • kies $h \in H$, dan $h \cdot h^{-1} \in H \Rightarrow e \in H$

• kies $h \in H$, neem $a = e, b = h$, dan $ab^{-1} = eh^{-1} = h^{-1} \in H$

• $h_1, h_2 \in H$, kies $a = h_1$, $b = h_2^{-1} \Rightarrow a \cdot b^{-1} = h_1 (h_2^{-1})^{-1} = h_1 h_2$, dus $h_1 h_2 \in H$

Vbd: in $\mathbb{Z}_6$, $H = \{0, 3\}$, ondergroep

$G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Q}$, H is ondergroep van G

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ niet gesloten onder bewerking $(+) \Rightarrow$ geen ondergroep

$G = \{M \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid \det M \neq 0\}$, $H = \{M \in G \mid \det M = 1\}$ is ondergroep

Als G groep en $g \in G$ dan is $H = \langle g \rangle$ een ondergroep

$\langle g \rangle = \{ g^k \mid k \in \mathbb{Z} \}$

Vb.d: in $\mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\langle k \rangle = \{k, -k, 2k, -2k, 3k, -3k, \ldots\}$

$\langle 1 \rangle = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\} = \mathbb{Z}$, $\langle -1 \rangle = \mathbb{Z}$

$U(10) = \{1, 3, 7, 9\}$, $\langle 9 \rangle = \{1, 9\}$, $\langle 3 \rangle = \{1, 3, 9, 7\} = U(10)$

Stel: G is eindige groep en $g \in G$, dan $G = \langle g \rangle \Leftrightarrow |g| = |G|$

Vb.d: $U(8) = \{1, 3, 5, 7\}$, $3^2 = 1$, $5^2 = 1$, $7^2 = 1$ alle elt. $\neq 1$ hebben orde 2

We zeggen $U(10)$ is cyclisch, $U(8)$ is niet cyclisch

$(\mathbb{Z}_6, +)$ $|1| = 6$, $|5| = 6$; dus cyclisch

$\mathbb{Z}_n$ $|1| = n \Rightarrow \mathbb{Z}_n = \langle 1 \rangle$

$|k| = n \Leftrightarrow ggd(k, n) = 1$

$|k| = \dfrac{kgv(k,n)}{k} = n \Leftrightarrow ggd(k,n) = 1$

i.h.b: $\mathbb{Z}_4$ cyclisch

isomorf

	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	b	c	0
b	b	c	0	a
c	c	0	a	b

$\mathbb{Z}_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$a + a + a = b + a = c$

$a + a + a + a = b + b = 0$

$\Rightarrow |a| = 4$

	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

$U(8)$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

isomorf

$U(8)$ wordt ook wel V_4 genoemd, de viergroep van Klein

$(G_1, *_1)$ en $(G_2, *_2)$ heten isomorf indien er een $\varphi : G_1 \to G_2$ bestaat met (i) φ bijectief
- injectief: $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Rightarrow g_1 = g_2$
- surjectief: $\forall g_2 \in G_2 \; \exists g_1 \in G_1, \; \varphi(g_1) = g_2$

(ii) $\forall g_1, g_1' \in G$ $\varphi(g_1 *_1 g_1') = \varphi(g_1) *_2 \varphi(g_1')$

Bewering: $\mathbb{Z}_4$ en $U(10)$ zijn isomorf

Bv: $\varphi(1) = 3$, $\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) \cdot \varphi(1) = 3 \cdot 3 = 9$

$\varphi(0) = 1$, $\varphi(3) = \varphi(1+1+1) = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 7$