Kenmerk: EWI2017/TW/DMMP/003/MU_NL (see page 4 for the English version)

Tentamen 1, Module 7, Vakcode 201600270

Discrete Structuren & Efficiënte Algoritmes

Donderdag 16 maart 2017, 13:45 - 16:45

Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Gebruik van zelfgeschreven formulebladen, één A4 per onderdeel, is wel toegestaan.

Dit tentamen bestaat uit drie onderdelen, en is gebaseerd op de volgende, geschatte tijdsbesteding per onderdeel (slechts als indicatie):

Algorithms & Data Structures (ADS)	1h	(30 punten)
Discrete Mathematics (DW)	1h 20 min	(40 punten)
Languages & Machines (L&M)	40 min	(20 punten)

Dus in totaal 30+40+20=90 punten. Incl. de 10 gratis punten zijn het 100 punten. Het tentamencijfer is het totaal aantal punten gedeeld door 10.

Gebruik aub per onderdeel (ADS/DW/L&M) een nieuw vel!

Algorithms & Data Structures

1. *(10 punten)* Beschouw het volgende algoritme (met * voor vermenigvuldigen, // voor integer division (bv. 7//2 = 3), en **2 voor kwadraat):

```
def func(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        if n<4:
            return n
        else:
            return 2*func(n//4) + 6 + func(n//4)**2
```

   (a) Geef een recursieve uitdrukking van de tijdscomplexiteit van dit algoritme, uitgedrukt in het aantal rekenkundige operaties.

   (b) Wat is de complexiteitsklasse van dit algoritme?

2. *(10 punten)*

   (a) Stel je verandert in een heap een willekeurig element (stel, met index i). Beschrijf (in woorden of in pseudocode) een algoritme die er voor zorgt dat de heapeigenschap zonodig hersteld wordt.

(b) Gegeven een binary search trees met positieve keys. Gegeven een key k waarvan we weten dat ie niet in de tree voorkomt. Geef een functie die oplevert: de grootste key in de tree, kleiner dan k (en 0 als er niet zo'n key is). Hint: loop door de tree alsof je k wilt inserten, en hou bij wat je onderweg tegenkomt.

3. *(10 punten)* Je wilt een aantal liedjes op een cd zetten. Neem aan dat je de keus hebt uit n liedjes, met tijdsduur t_i minuten voor liedje i. Je wilt de cd zoveel mogelijk vullen, dat wil zeggen dat je het liefst zoveel mogelijk minuten muziek op de cd wilt. Ga er van uit dat een cd maximaal 80 minuten kan bevatten.

   (a) Stel $C(i,k)$ geeft aan de minimale rest (dus hoeveel minuten ongebruikt blijven) als nog k minuten gevuld moeten worden met stukken gekozen uit de verzameling $\{1,\ldots,i\}$. Beargumenteer dat

   $$C(i,k) = min\{C(i-1,k), C(i-1,k-t_i)\}$$

   (b) Geef een polynomiaal algoritme, gebaseerd op dynamisch programmeren, dat berekent hoeveel minuten je maximaal op de cd kunt zetten.

Discrete Mathematics

4. (5 points) Voor gegeven getallen $a, b \in \mathbb{Z}$, neem aan dat $s, t, x, y \in \mathbb{Z}$ bestaan zodat $as+bt = 6$ en $ax + by = 35$. Laat zien dat a en b dan relatief priem zijn.

5. (10 points)

   (a) Laat a_n het aantal strings van lengte n in $\{a,b,c\}^*$ zijn, die een even aantal a's bevatten. Bereken a_1, a_2 en geef een recurrente betrekking aan voor alle a_n, $n \geq 3$. (Je hoeft deze betrekking niet op te lossen.)

   (b) Bereken de oplossing voor de recurrente betrekking

   $$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 4n + 4 \quad (n \geq 2) \quad \text{met } a_0 = 5 \text{ and } a_1 = 9\,.$$

6. We willen een verzameling van 60 informatica, 20 wiskunde, en 20 atlas studenten opsplitsen in twee werkcollege groepen van dezelfde grootte (50). In elk van de twee groepen willen we minstens 20 maar hooguit 35 informatica studenten hebben, minstens 5 wiskunde studenten, en minstens 5 atlas studenten.

   (a) (6 points) Hoeveel verschillende samenstellingen van één werkcollege groep zijn er mogelijk (waarbij beide groepen aan de gegeven eisen voldoen)? Gebruik een genererende functie.

   (b) (2 points) Hoeveel verschillende verdelingen van de studenten in twee groepen zijn er mogelijk?[1]

7. (7 points) Laat $G = (V, E)$ een eenvoudige, ongerichte graaf zijn, een laat $\bar{G}$ de complement graaf van G zijn (met dezelfde verzameling van punten, en een lijn tussen twee punten precies waar G geen lijn heeft). Laat zien dat, als G en $\bar{G}$ beiden planair zijn, dan geldt dat $|V| \leq 10$.

[1] Merk op dat de volgende twee oplossingen dezelfde verdeling impliceren: [group 1: 35inf+5wisk+10atlas, group 2: 25inf+15wisk+10atlas], and [group 1: 25inf+15wisk+10atlas, group 2: 35inf+5wisk+10atlas].

8. (10 points) Laat $G = (V, A, c)$ een netwerk zijn, met V de verzameling van punten, A de verzameling (gerichte) lijnen, en $c_a \geq 0$ de capaciteiten per gerichte lijn $a \in A$. Laat $s, t \in V$ en laat $f = (f_a)_{a \in A}$ een willekeurige (s,t)-flow in G zijn. Geef een kort bewijs of een tegenvoorbeeld voor elk van de volgende stellingen.

   (a) f is een maximale (s,t)-flow $\Rightarrow f_a = 0$ of $f_a = c_a$ voor elk $a \in A$.

   (b) Er bestaat een maximale (s,t)-flow f zodat $f_a = 0$ of $f_a = c_a$ voor elk $a \in A$.

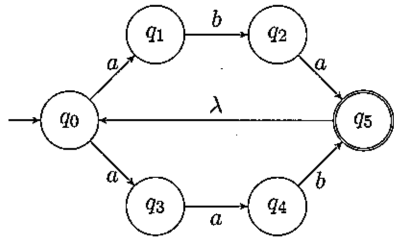
   (c) De minimale (s,t)-cut in G is uniek als de capaciteiten c_a paarsgewijs verschillend zijn.

   (d) Als elk van de capaciteiten c_a met één $\lambda > 0$ vermenigvuldigd word, veranderen de minimale (s,t)-cuts niet.

   (e) Als één $\lambda > 0$ op elk van de capaciteiten c_a opgeteld word, veranderen de minimale (s,t)-cuts niet.

Languages & Machines

9. *(10 punten)* Beschouw de volgende NFA-λ, M (alleen q_5 is accepterend):



   (a) Geef de λ-afsluiting en de input-transitiefunctie van M in een tabel weer.

   (b) Transformeer de automaat M systematisch naar een onvolledige DFA.

   (c) Construeer systematisch een reguliere expressie E met $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(M)$.

10. *(10 punten)* We definiëren de volgende drie talen:

   - taal $L_1 := \{a^i\, b^j\, c^k \mid i > 0 \text{ en } 0 \leq j \leq k\}$
   - taal $L_2 := \{a^i\, b^j\, b^k \mid i > 0 \text{ en } 0 \leq j \leq k\}$
   - L_3 is een (willekeurige) *eindige* taal.

   Geef aan of de volgende talen regulier zijn of niet. Bewijs je antwoorden.

   (a) De taal L_1.

   (b) De taal $L_2 \cup L_3$.

Kenmerk: EWI2017/TW/DMMP/003/MU_E

Exam 1, Module 7, Code 201600270
Discrete Structures & Efficient Algorithms
Thursday, March 16, 2017, 13:45 - 16:45

All answers need to be motivated. No calculators. You are allowed to use a handwritten cheat sheet (A4) per topic (ADS, DM, L&M).

This exam consists of three parts, with the following (estimated) times per part:

Algorithms & Data Structures (ADS)	1h	(30 points)
Discrete Mathematics (DW)	1h 20 min	(40 points)
Languages & Machines (L&M)	40 min	(20 points)

Total of 30+40+20=90 points. Including 10 bonus points that makes 100 points. Your exam grade is the total number of points divided by 10.

Please use a new sheet of paper for each part (ADS/DW/L&M)!

Algorithms & Data Structures

1. *(10 points)* Consider the following algorithm (with * for multiplication, // for integer division (eg. 7//2 = 3), and **2 for square):

```
def func(n):
    if n==0:
        return 1
    else:
        if n<4:
            return n
        else:
            return 2*func(n//4) + 6 + func(n//4)**2
```

   (a) Give a recursive expression for the time complexity of this algorithm, expressed in the number of arithmetical operations.

   (b) What is the complexity class of this algorithm?

---

2. *(10 points)*

   (a) Suppose in a heap you update an arbitrary element (say with index i). Describe (in words or in pseudocode) an algorithm that repairs (if necessary) the heap property.

   (b) Given a binary search tree with positive keys, and a key k that does not occur in the tree. Give a function that yields: the biggest key in the tree, smaller than k (or zero if there is no such key). Hint: traverse the tree as if you want to insert k, and keep track of what you encounter.

3. *(10 points)* Suppose you want to put songs on a cd. Suppose you can choose from n songs, where song i takes t_i minutes. You want to fill the cd as much as possible, which means that you want to put as much minutes of music on it as possible. Assume a cd may contain at most 80 minutes of music.

   (a) suppose $C(i,k)$ indicates the minimal remainder (so the amount of unused minutes) if still k minutes need to be filled with songs chosen from the set $\{1,\ldots,i\}$. Explain that

   $$C(i,k) = min\{C(i-1,k), C(i-1,k-t_i)\}$$

   (b) Give a polynomial algorithm, based on dynamic programming, that calculates the maximal amount of minutes you can put on the cd.

Discrete Mathematics

4. (5 points) For given and fixed integer numbers $a, b \in \mathbb{Z}$, assume that we know that there exist $s, t, x, y \in \mathbb{Z}$ so that $as + bt = 6$ en $ax + by = 35$. Prove that a and b are relatively prime.

5. (10 points)

   (a) Let us denote by a_n the number of strings in $\{a,b,c\}^*$ of length n that contain an even number of a's. Compute a_1, a_2, and give a recurrence relation for a_n, $n \geq 3$. (You do not have to solve the recurrence relation.)

   (b) Compute the solution to the recurrence relation

   $$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 4n + 4 \quad (n \geq 2) \quad \text{with } a_0 = 5 \text{ and } a_1 = 9\,.$$

6. We want to divide 60 computer science students, 20 mathematics students and 20 atlas students into two tutorial groups of equal size (50), so that in each group we have at least 20 and at most 35 computer science students, at least 5 mathematics students, and at least 5 atlas students.

   (a) (6 points) How many different compositions are there to form a tutorial group (so that both groups fulfil all requirements)? Use a generating function to obtain your result.

   (b) (2 points) How many different ways are there to divide the students among the tutorial groups?[1]

7. (7 points) Let $G = (V,E)$ be a simple, undirected graph, and $\bar{G}$ be the complement graph of G (that has the same set of vertices as G and contains exactly all edges that are not in G). Show that, if both G and $\bar{G}$ are planar, then it must be true that $|V| \leq 10$.

8. (10 points) Suppose we are given a capacitated network $G = (V,A,c)$, where V is the set of vertices, A is the set of (directed) arcs, and $c_a \geq 0$, $a \in A$ are the arc capacities. Also, let $s,t \in V$ and $f = (f_a)_{a \in A}$ be a feasible flow in G. Give a short proof or give a counterexample for each of the following statements.

   (a) f is a maximal (s,t)-flow $\Rightarrow$ $f_a = 0$ or $f_a = c_a$ for all $a \in A$.

---

[1] For example, the following two assignments are effectively the same division: [group 1: 35cs+5math+10atlas, group 2: 25cs+15math+10atlas], and [group 1: 25cs+15math+10atlas, group 2: 35cs+5math+10atlas].

(b) There is a maximal (s,t)-flow f such that $f_a = 0$ or $f_a = c_a$ for all $a \in A$.

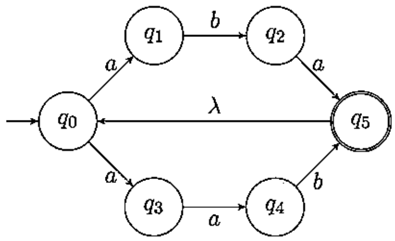
(c) A minimal (s,t)-cut in G is unique if all capacities c_a are pairwise distinct.

(d) Multiplying each of the capacities c_a by one and the same number $\lambda > 0$ does not change the minimal (s,t)-cuts.

(e) Adding one and the same number $\lambda > 0$ to each of the capacities c_a does not change the minimal (s,t)-cuts.

Languages & Machines

9. *(10 points)* Consider the following NFA-λ, M (only q_5 is accepting):



(a) Provide the λ-closure and input-transition function of M in a table.

(b) Transform the automaton M systematically to an incomplete DFA.

(c) Construct systematically a regular expression E with $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(M)$.

10. *(10 points)* We introduce the following three languages:

- language $L_1 := \{a^i\, b^j\, c^k \mid i > 0 \text{ and } 0 \le j \le k\}$
- language $L_2 := \{a^i\, b^j\, b^k \mid i > 0 \text{ and } 0 \le j \le k\}$
- L_3 is an (abritrary) *finite* language.

Indicate whether the following languages are regular or not. Prove your answers.

(a) The language L_1.

(b) The language $L_2 \cup L_3$.