

Tentamen Kansrekening en Statistiek (191530082) voor INF
Vrijdag 27 juni 2014, 13.45-16.45 uur.

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Het formuleblad en de tabellen zijn separaat toegevoegd. Vermeld uw naam, studentnummer en studierichting op uw werk.

1. Gegeven is dat $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.3$ en $P(A) = 0.35$.
 - a. Bereken $P(A|B)$.
 - b. Zijn A en B onderling onafhankelijk? Motiveer uw antwoord.

2. Een sterke mate van kleurenblindheid komt voor bij ca. 2% van de mannen. Stel, we nemen een aselechte steekproef van n mannen.
 - a. Geef de kansverdeling van $X =$ "het aantal kleurenblinden in een aselechte steekproef van $n = 10$ mannen" en bereken de kans dat minstens één van deze mannen kleurenblind is.
 - b. Welke benaderende kansverdeling kunnen we voor het aantal kleurenblinde mannen gebruiken bij een steekproef van $n = 100$ mannen?
 - c. Benader voor $n = 10000$ de kans dat er in de steekproef 250 of meer kleurenblinde mannen voorkomen.

3. (Darten met Barney). Met kans 60% gooit Barney met een dartpijlje "triple 20" (dit is een klein gebiedje op het dartbord binnen de sectie voor 20 punten) en met kans 30% slaagt hij er in een pijltje in de "bull's eye" (de roos) te werpen. Voor deze opgave mag worden aangenomen dat de verschillende worpen met een pijltje onafhankelijk zijn.

Een sponsor stelt voor het behalen van het wereldkampioenschap darts de volgende ludieke premie ter beschikking: eerst moet Barney zo vaak mogelijk achter elkaar (één voor één) "triple 20" gooien. Zij N het aantal (achtereenvolgende) succesvolle triple 20's totdat hij mist.

Vervolgens mag hij N keer op de bull's eye gooien. Zij X het aantal succesvolle worpen op bull's-eye in de serie van N worpen: hij krijgt 1000 Euro voor elke keer dat hij bull's eye werpt.

 - a. Geef $P(N = 4)$ en bepaal de waarde van $E(N)$
 - b. Bereken $P(X = 0 | N = 4)$ en $E(X | N = 4)$.
 - c. Bereken de kans dat Barney niets van de sponsor krijgt, dus bereken $P(X = 0)$.

4. Met behulp van een (pseudo)randomgenerator verkrijgen we een willekeurig getal X tussen 0 en 1.
 - a. Bereken het k -de moment $E(X^k)$ voor $k = 1, 2, 3, \dots$
 - b. Voor het simuleren van de bediening van klanten aan een loket hebben we willekeurige bedieningsduren met een gemiddelde van 2 minuten nodig.

Toon aan dat $Y = -2 \ln(X)$ exponentieel verdeeld is verwachtingswaarde 2.
 - c. De random gegenereerde bedieningsduren Y_1, \dots, Y_{100} hebben alle een exponentiele verdeling met verwachting 2 (minuten). Bereken de kans dat de totale bediening (de som van de bedieningsduren) meer dan 3 uur bedraagt.

5. De stochastische variabelen X en Y zijn o.o. en beiden $N(2, 9)$ -verdeeld.
- Bereken $P(2X + Y > 10)$.
 - Bereken de $cov(X, 2X + Y)$ en de correlatiecoëfficiënt $\rho(X, 2X + Y)$.
6. De dienst computerfaciliteiten van een universiteit met 30000 studenten overweegt om hen, bij voldoende belangstelling, een aantrekkelijk aanbod voor een laptop te doen. Om dat aanbod te kunnen doen is een afzet van 3000 laptops nodig (een fractie $p = 0.10$ van het aantal studenten). Alvorens het project te starten wordt via een steekproef de belangstelling ervoor geïnventariseerd. Zij X het aantal (serius) belangstellenden in een aselechte steekproef van n studenten.
- Geef een **zuivere schatter** voor de fractie p van belangstellenden en druk de verwachte kwadratische fout van deze schatter uit in n en p .
 - Hoe groot moeten we n kiezen zodat een (benaderend) 95%-betrouwbaarheidsinterval voor p maximaal 0.08 breed mag zijn?
Neem daarbij aan dat p in de buurt van 0.10 ligt.
- Men besluit een aselechte steekproef van $n = 400$ studenten uit te voeren en men vindt onder deze 400 studenten $X = 52$ (serius) belangstellenden.
- Als we $H_0: p \leq 0.10$ willen toetsen tegen $H_1: p > 0.10$ met onbetrouwbaarheidsdrempel 0.05, wat is dan de conclusie op basis van het resultaat $X = 52$ in de steekproef?
Motiveer uw antwoord m.b.v. de berekening van de **kritieke waarde** (kritiek gebied).
 - Wanneer treedt in dit voorbeeld een fout van de tweede soort op?
Bereken de kans op een fout van de tweede soort voor $p = 0.15$.
7. Bij een beoordeling van internetproviders met gratis e-mailvoorzieningen werd de tijd gemeten waarmee e-mails op de bestemming werden afgeleverd. Bij één van de providers was het resultaat van een aselechte steekproef van 25 van deze tijden als volgt: de gemiddelde tijd was 14.3 seconden en de standaardafwijking 5.1 seconden.
- Bepaal een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de verwachte afleveringstijd voor deze provider.
 - Is de volgende interpretatie van het in a. bepaalde interval correct: “ongeveer 95% van alle aflevertijden ligt tussen de gevonden intervalgrenzen”? Motiveer uw antwoord.

Normering:

1		2		3		4		5		6		7		Totaal				
a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	a	b	c	d	a	b			
2	2	2	2	2	2	3	2	3	3	3	3	2	2	4	2	3	1	45