Kenmerk : TW2013/DWMP/031/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TI/BIT**
Vakcode : 191521610
Datum : 8 november 2013
Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. In deze opgave bekijken we rijtjes van twaalf cijfers, zoals 869945757310 en 001229321091.

   (a) [1 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?

   (b) [2 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die bestaan uit drie nullen, vier enen en vijf tweeën?

   (c) [3 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die alle cijfers bevatten, zoals 909857341026?

   Bij de volgende onderdelen is de volgorde van de cijfers niet van belang (dus het rijtje 309834917603 is hetzelfde als 480039936713)

   (d) [1 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er?

   (e) [2 pt] Hoeveel verschillende rijtjes zijn er die alle oneven cijfers bevatten en niet meer dan twee vieren hebben, zoals 904157341221?

2. (a) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic".

$$((p \to q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q))) \iff \neg(p \vee q)$$

   (b) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvulling hierop m.b.t. quantoren.

$$\begin{array}{l} \forall x\,[p(x) \vee q(x)] \\ \underline{\forall x\,[(\neg p(x) \wedge q(x)) \to r(x)]} \\ \therefore \forall x\,[\neg r(x) \to p(x)] \end{array}$$

3. (a) [2 pt] De verzamelingen A en B in het universum $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$ zijn gegeven door: $A = \{\, x \in \mathcal{U} \mid x^2 < 5 \,\}$ en $B = \{\, x \in \mathcal{U} \mid x > 0 \,\}$. Bepaal $A \Delta B$, $\overline{A - B}$ en $\mathcal{P}(A \cap B)$.

   (b) [2 pt] Laat C en D twee verzamelingen zijn in een universum $\mathcal{W}$. Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van de volgende bewering:

$$\mathcal{P}(C) \cup \mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(C \cup D).$$

z.o.z

4. [4 pt]
Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat voor alle $n \geq 1$ geldt: $\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) = (n+1)! - 1.$

5. Laat $X = \{1, 2, 3\}$. De relatie R op $\mathcal{P}(X)$ wordt gegeven door:

$$(A, B) \in R \iff (A \subseteq B) \vee (B \subseteq A).$$

(a) [3 pt] Onderzoek of R reflexief is, of R symmetrisch is , of R transitief is en of R antisymmetrisch is.

(b) [1 pt] Is R een equivalentierelatie? Is R een partiële ordening? Geef toelichting.

6. [3 pt]
Beschouw de grafen G_1, G_2 en G_3 in Figuur 1.

Figure 1: G_1, G_2 en G_3

Onderzoek welke grafen isomorf zijn. Als twee grafen isomorf zijn geef dan een isomorfisme; als twee grafen niet isomorf zijn, leg dan uit waarom niet.

7. [4 pt]
Van een boom T zijn de volgende gegevens bekend. T heeft precies vijf punten van graad 3 en precies drie punten van graad 4. T heeft geen punten van graad 5 of hoger. Het aantal punten van graad 2 is onbekend, evenals het totaal aantal punten van T. Bepaal het aantal punten van graad 1.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten

4. [4 pt]

Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat

voor alle $n \geq 1$ geldt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i!) = (n+1)! - 1.$

5. Laat $X = \{1, 2, 3\}$. De relatie R op $\mathcal{P}(X)$ wordt gegeven door:

$$(A, B) \in R \iff (A \subseteq B) \vee (B \subseteq A).$$

(a) [3 pt] Onderzoek of R reflexief is, of R symmetrisch is , of R transitief is en of R antisymmetrisch is.

(b) [1 pt] Is R een equivalentierelatie? Is R een partiële ordening? Geef toelichting.

6. [3 pt]

Beschouw de grafen G_1, G_2 en G_3 in Figuur 1.

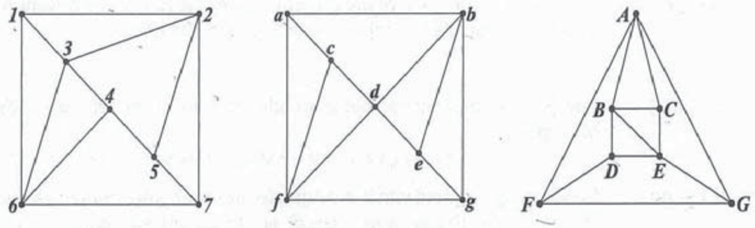

Figure 1: G_1, G_2 en G_3

Onderzoek welke grafen isomorf zijn. Als twee grafen isomorf zijn geef dan een isomorfisme; als twee grafen niet isomorf zijn, leg dan uit waarom niet.

7. [4 pt]

Van een boom T zijn de volgende gegevens bekend. T heeft precies vijf punten van graad 3 en precies drie punten van graad 4. T heeft geen punten van graad 5 of hoger. Het aantal punten van graad 2 is onbekend, evenals het totaal aantal punten van T. Bepaal het aantal punten van graad 1.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten