

Kenmerk : TW2016/DWMP/004/ha

Course : **Discrete Mathematics for Computer Science**

Date : November 11, 2016

Time : 08.45–10.45 hrs

**Motivate all your answers. A formula sheet is included.**

**The use of electronic devices is not allowed.**

In this exam:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

1. Let  $A$  be an  $m \times n$ -matrix consisting of real numbers. Give quantified expressions for the following statements.

(a) [2 pt] The numbers in the last row of  $A$  form an increasing sequence.

(b) [4 pt]  $A$  contains two different columns that have a 0 in the same row.

2. [6 pt]

Prove the validity of the following argument using the "Laws of Logic", the "Rules of Inference" and the supplement w.r.t. quantifiers (the N-Laws and U-Rules).

$$\begin{array}{l} \forall x [\neg q(x) \rightarrow p(x)] \\ \forall x [r(x) \rightarrow \neg p(x)] \\ \exists x \neg [\neg p(x) \wedge q(x)] \\ \hline \therefore \exists x [p(x) \wedge \neg r(x)] \end{array}$$

3. [6 pt]

Let  $A$ ,  $B$  and  $C$  be sets in a universe  $\mathcal{U}$ . Prove that

$$A - (B - C) = A \cap (\overline{B} \cup C).$$

4. [6 pt]

Prove with mathematical induction that for all  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ ,

$$3^{4n+1} - 5^{2n-1} \text{ is divisible by 7.}$$

5. [6 pt]

Let  $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  be the binary operation on  $[0, \infty)$  given by:

$$f(x, y) = |x - y|.$$

Examine if  $f$  is commutative, if  $f$  is associative and if  $f$  has an identity.

6. Let  $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$  and  $B = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$  and let  $R$  be the relation on  $A$  given by:

$$XRY \text{ if and only if } X \subseteq Y.$$

(a) [2 pt] Show that  $(A, R)$  is a poset.

(b) [4 pt] Construct a Hasse diagram for  $(A, R)$  and determine the least upper bound and greatest lower bound of  $B$ , if they exist. Is  $(A, R)$  a lattice?

**Total: 36 points**

Vak : **Discrete Wiskunde voor Technische Informatica**  
Datum : 11 November 2016  
Tijd : 08.45–10.45 uur

**Motiveer al uw antwoorden. Een formuleblad is bijgevoegd.  
Het gebruik van elektronische apparatuur is niet toegestaan.**

In deze toets:  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

1. Laat  $A$  een  $m \times n$ -matrix zijn bestaande uit reële getallen. Geef gekwantificeerde uitdrukkingen voor de volgende beweringen.

- (a) [2 pt] De getallen in de laatste rij van  $A$  vormen een stijgende rij.  
(b) [4 pt]  $A$  bevat twee verschillende kolommen die in dezelfde rij een 0 hebben.

2. [6 pt]  
Bewijs de geldigheid van het volgende argument door gebruik te maken van de "Laws of Logic", de "Rules of Inference" en de aanvullingen hierop m.b.t. kwantoren (de N-Laws en U-Rules).

$$\frac{\begin{array}{l} \forall x [\neg q(x) \rightarrow p(x)] \\ \forall x [r(x) \rightarrow \neg p(x)] \\ \exists x \neg [\neg p(x) \wedge q(x)] \end{array}}{\therefore \exists x [p(x) \wedge \neg r(x)]}$$

3. [6 pt]  
Laat  $A$ ,  $B$  and  $C$  verzamelingen zijn in een universum  $\mathcal{U}$ . Bewijs dat

$$A - (B - C) = A \cap (\overline{B} \cup C).$$

4. [6 pt]  
Bewijs met volledige inductie dat voor alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  geldt:

$$3^{4n+1} - 5^{2n-1} \text{ is deelbaar door } 7.$$

5. [6 pt]  
Laat  $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  de binaire operatie zijn op  $[0, \infty)$  gegeven door:

$$f(x, y) = |x - y|.$$

Onderzoek of  $f$  commutatief is, of  $f$  associatief is en of  $f$  een eenheidselement heeft.

6. Laat  $A = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$  en  $B = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$  en laat  $R$  de relatie op  $A$  zijn gegeven door:

$$XRY \text{ dan en slechts dan als } X \subseteq Y.$$

- (a) [2 pt] Toon aan dat  $(A, R)$  een poset is.  
(b) [4 pt] Construeer een Hasse diagram voor  $(A, R)$  en bepaal de kleinste bovengrens en grootste ondergrens van  $B$ , als deze bestaan. Is  $(A, R)$  een tralie?

**Totaal: 36 punten**