

Tentamen Kansrekening en Statistiek voor INF (191530082)
Maandag 3 november 2014 van 8.45 – 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven. Separaat zijn het formuleblad en de tabellen toegevoegd.
Vermeld ook uw studentnummer op uw werk.

1. Een machine maakt producten waarvan 20% defect is. Alle producten worden gecontroleerd. Bij controle wordt 90% van de defecte producten verwijderd, maar ook 5% van de goede producten.
Wat is de kans dat een willekeurig product bij controle wordt verwijderd?
Definieer voor de beantwoording van de volgende vragen eerst relevante gebeurtenissen, druk de gegeven kansen uit in die gebeurtenissen en laat zien welke rekenregels je gebruikt om de kans te berekenen
2. Tussen Peter en Paul worden 26 kaarten willekeurig verdeeld: elk krijgt 13 kaarten.
Onder de kaarten bevinden zich precies 6 schoppen. Bepaal de kans dat
 - a. één van beiden precies 4 schoppen krijgt.
 - b. beiden 3 schoppen krijgen.
3. Het binnenhalen van grote orders door een bedrijf is een stochastisch proces.
De verkoopafdeling modelleert de tijd tussen twee opeenvolgende grote orders als een exponentieel verdeelde variabele X met een verwachte waarde van 10 dagen.
 - a. Bereken $P(X \leq x)$.
 - b. Bepaal de mediaan M (zodat $P(X > M) = \frac{1}{2}$).
 - c. Bepaal $E(X^2)$.

De inkoopafdeling registreert gedurende het jaar de grote orders en de tijden X_i tussen de opeenvolgende grote orders: X_1, X_2, X_3, \dots worden o.o. verondersteld met dezelfde verdeling als X hiervoor.

 - d. Leid de kansdichtheid van $Y = \max(X_1, X_2)$ af.

In een jaar hoopt de inkoopafdeling zo'n 36 grote orders binnen te halen.

 - e. Bereken de kans dat de 36^{ste} order al een maand voor het einde van het jaar binnen is, dus bereken $P(\sum_{i=1}^{36} X_i \leq 333)$.
4. Lex en Karien beginnen met een spelletje mens-erger-je-niet.
Om de beurt trachten Lex en Karien een 6 te werpen met een zuivere dobbelsteen, hetgeen nodig is om een pion op het bord te mogen plaatsen.
 X is het aantal beurten dat Lex nodig heeft om een pion op het speelbord te krijgen.
 Y is het overeenkomstige aantal beurten dat Karien nodig heeft.
 - a. Bepaal $P(X = 10)$ en $P(X > 10)$
 - b. Bereken $P(X = 1 \text{ en } Y = 5)$
 - c. Bepaal $E(X + Y)$ en $var(X + Y)$.
 - d. Bepaal met behulp van de convolutiesom de kansfunctie van $X + Y$.
5. X is $N(10, 4)$ -verdeeld, Y is $N(20, 9)$ -verdeeld en X en Y zijn onderling onafhankelijk.
 - a. Bereken $P(2X - Y \geq 0)$.
 - b. Bereken de correlatiecoëfficiënt $\rho(X, 2X - Y)$.

6. Exacte (inclusief technische) opleidingen aan universiteiten willen weten hoeveel van de eerstejaars studenten Wiskunde D als eindexamenvak hebben gedaan tijdens hun middelbare schooltijd. We noemen p de fractie studenten die wiskunde D als eindexamenvak deden in deze populatie. Omdat gegevens over Wiskunde D niet goed zijn geregistreerd in de informatiesystemen besluit men een aselechte steekproef van n studentendossiers te raadplegen om te bepalen of deze exacte studenten wiskunde D hebben gevolgd.

Noem $X =$ "het aantal studenten met wiskunde D in het eindexamenpakket in de steekproef".

- Geef de exacte verdeling van X en de benaderende normale verdeling van X (uitgedrukt in n en p).
- Geef een zuivere schatter van de onbekende p en laat zien dat deze schatter zuiver is.
- Geef de verwachte kwadratische fout van deze schatter voor een willekeurige steekproefomvang n en laat zien dat deze naar 0 gaat als n zeer groot wordt.
- Bereken $P(X \geq 114)$ voor het geval dat $n = 200$ en $p = 0.5$

De opleidingen vermoedden op voorhand dat meer dan 50% van de exacte studenten wiskunde D in hun eindexamenpakket hebben gehad. Bij uitvoering van de steekproef bleken er 114 van de $n = 200$ studenten wiskunde D als eindexamenvak te hebben gedaan.

- Bewijst de uitkomst van de steekproef het vermoeden van de opleidingen?
Voer daartoe een toets uit met onbetrouwbaarheidsdrempel 5%, in 7 stappen:
 - Formuleer het kansmodel.
 - Formuleer nulhypothese en alternatieve hypothese in termen van de parameters van het kansmodel.
 - Geef een geschikte toetsingsgrootte en zijn verdeling onder H_0
 - Bereken of geef de waarde van de toetsingsgrootte.
 - Bepaal de kritieke waarde(n) en geef het kritieke gebied of bereken de overschrijdingskans.
 - Formuleer de conclusie omtrent het al dan niet verwerpen van H_0 bij de gegeven onbetrouwbaarheid(sdrempel).
 - Vermeld de conclusie in "gewone woorden".

7. Economen onderzochten de winstgevendheid van MKB-ondernemingen enerzijds en van grote ondernemingen anderzijds. Nadat hiervoor een definitie werd gekozen werden van beide populaties aselechte steekproeven van ondernemingen genomen en de winstgevendheid (in %) bepaald. Hier volgen de resultaten:

	Steekproef-omvang	Steekproef-gemiddelde	Steekproef-variantie
MKB	13	4.50	11.56
Grote ondernemingen	13	6.10	5.78

- Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de verwachte winstgevendheid van MKB-bedrijven op grond van deze de steekproef van 13 MKB-bedrijven.
Welke veronderstellingen maak je daarbij?
- Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de variantie van de winstgevendheden van de grote bedrijven.

Normering:

1	2		3					4				5		6					7		Totaal
	a	b	a	b	c	d	e	a	b	c	d	a	b	a	b	c	d	e	a	b	
3	2	2	2	2	2	3	3	2	2	2	3	3	3	2	2	2	3	6	3	3	55

Tentamencijfer = $1 + 9 \cdot$ aantal punten/55 (afgerond op een geheel getal)