Tentamen Kansrekening en Statistiek (191530082) voor INF
donderdag 10 april 2014, 8.45 – 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Separaat zijn het formuleblad en de tabellen toegevoegd. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een GR (programmeerbare rekenmachine) is **niet** toegestaan, wel een gewone wetenschappelijke rekenmachine.

1. Van twee gebeurtenissen A en B weten we dat $P(A) = 0.2$ en $P(B) = 0.5$.
Bereken de kans $P(A \cup B)$ in de volgende gevallen:

a. Als A en B elkaar uitsluitende gebeurtenissen zijn.
b. Als A en B onderling onafhankelijke gebeurtenissen zijn.
c. Als $P(A|B) = 0.3$.

2. Op een bepaald punt langs de Rijksweg controleert de politie of de passerende auto's te hard rijden. Indien de snelheidslimiet met 30 km wordt overschreden, wordt de bestuurder aangehouden en de auto in beslag genomen. Zij X het aantal in beslag genomen auto's gedurende de controle waarbij er n auto's passeren en p de kans is dat een passerende auto minstens 30 km te hard rijdt.
Bereken of benader de volgende kansen:

a. $P(X > 0)$ voor $n = 10$ en $p = 0.2$.
b. $P(X \geq 5)$ voor $n = 250$ en $p = 0.01$.
c. $P(X < 30)$ voor $n = 400$ en $p = 0.1$.

3. Een kleine fabriek werkt met een ochtendploeg en een avondploeg. Op basis van jarenlange statistieken is de simultane kansverdeling van $\boldsymbol{X}$ = "het aantal afwezigen bij de ochtendploeg" en $\boldsymbol{Y}$ = "het aantal afwezigen bij de avondploeg" bepaald.
De kansen $\boldsymbol{P(X = x \text{ en } Y = y)}$ zijn in de volgende tabel gegeven:

$x \setminus y$	0	1	2
0	0.20	0.10	0
1	0.10	0.15	0.15
2	0	0.15	0.15

a. Bepaal $E(X)$ en $var(X)$.
b. Bereken de correlatiecoëfficiënt en verklaar wat deze zegt over het verband tussen X en Y.
c. Bereken $E(X + Y)$ en $var(X + Y)$.
d. Bepaal de kansverdeling van Y, gegeven $X = 0$, en $E(Y|X = 0)$.

4. Voor een loket wacht een rij mensen om geholpen te worden. We nemen aan dat de bedieningsduren $X_1, X_2, \ldots$ van de mensen in de rij onderling onafhankelijk en alle exponentieel verdeeld zijn, met een verwachte bedieningsduur van 2 minuten.

a. Bereken $P(X_1 > 3)$ en $P(X_1 > 5 \mid X_1 > 2)$.
b. Bereken $P(X_1 > 3 \text{ en } X_2 > 3)$.

c. Bereken $P(X_1 + X_2 > 3)$.
d. Bereken $P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} > 90)$.
e. Indien we de exponentiële verdeling van de bedieningsduren X_i willen simuleren, kunnen we gebruik maken van een random getal U tussen 0 en 1 (dus U is uniform verdeeld op (0, 1)). Toon aan dat in dit geval $X = -2\ln(U)$ het gewenste resultaat oplevert.

5. Het rendement op een aandelenfonds wordt vaak gemodelleerd als een normaal verdeelde stochastische variabele X met een verwacht jaarrendement μ (> 0).
Voor een bepaald type fondsen wordt ten aanzien van het risicoprofiel verondersteld dat de standaardafwijking σ gelijk is aan μ, zodat $X \quad N(\mu, \mu^2) -$ verdeeld is.
We hebben nu voor zo'n fonds de beschikking over een aselecte steekproef $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ van 10 van deze jaarrendementen, met als gemiddelde $\overline{X}$.
Beschouw de verzameling van schatters van μ van de vorm $T = c\overline{X}$, met constante $c > 0$

a. Druk $E(T)$ en $var(T)$ uit in c en μ.
b. Voor welke waarde van c is T een zuivere schatter?
c. Bereken de verwachte kwadratische fout van T en bepaal de waarde van c waarvoor T de beste schatter van μ is.

6. De volgende gegevens betreft de lengtes (in dagen) van de menstruatiecyclus van een aselecte steekproef van 15 vrouwen.

26	24	29	33	25
26	23	30	31	30
28	27	29	26	28

Numeriek samengevat: $\overline{x} = 27.667$ en $s = 2.743$.

a. Is het (populatie)gemiddelde van de lengte van de menstruatiecyclus gelijk aan de lengte van een maanmaand? De lengte van een maanmaand is 29.5 dagen. Voer een toets uit om deze vraag te beantwoorden. Kies α = 5% en voer de volledige toetsingsprocedure uit, dus geef achtereenvolgens:
1. het kansmodel,
2. de hypothesen,
3. de toetsingsgrootheid en zijn verdeling onder H_0,
4. de waargenomen waarde,
5. het besliscriterium met het kritieke gebied of de overschrijdingskans en
6. de statistische en
7. de verwoorde conclusie.

b. Bepaal ook het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de variantie σ^2.

Normering:

1			2			3				4					5			6		Totaal
a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	e	a	b	c	a	b	
1	1	2	2	2	3	2	3	3	3	2	2	2	3	3	2	2	3	6	3	50

Tentamencijfer = 1 + 9×(aantal punten)/50