Kenmerk : TW2008/DWMP/65/ha

Vak	:	**Lineaire Algebra voor INF/BIT/TEL**
Vakcode	:	152165
Datum	:	16 juni 2008
Tijdstip	:	13.30–16.30 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een rekenmachine is toegestaan (ter controle), maar de gevraagde berekeningen dienen exact te worden uitgevoerd, dus niet in decimale getallen.

1. De matrix A en de vector $\mathbf{b}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \beta - 2\alpha \\ 1 & 0 & -1 & -\beta \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha + 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Hierbij zijn $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

(a) [2 pt] Laat zien dat $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -\beta & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha+2 & \alpha(\beta+4) & 0 \end{bmatrix}$ een standaardrijvorm (*echelon form*) is van de aangevulde matrix van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) [1 pt] Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ oplosbaar is.

(c) [2 pt] Bepaal alle waarden van α en β waarvoor geldt: het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ is oplosbaar voor alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(d) [2 pt] Voor welke α en β is de dimensie van de oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ maximaal? Bepaal deze oplossingsverzameling en schrijf haar in parametrische vectorvorm.

2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding die elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ eerst roteert om de oorsprong over een hoek van $\frac{\pi}{2}$ radialen (tegen de klok in) en dan projecteert op de lijn met vergelijking $x_2 = x_1$. A is de representatiematrix (*standard matrix*) van T.

(a) [2 pt] Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(b) [2 pt] Bepaal Nul A, door uitsluitend gebruik te maken van bovenstaande definitie van T (dus zonder gebruik te maken van de matrix A zelf).

(c) [2 pt] Bepaal alle vectoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ waarvoor geldt: $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Z.O.Z

3. Gegeven zijn een $m \times n$-matrix A, een $n \times k$ matrix B en een vector $\mathbf{v} \in R^k$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Verder is gegeven dat $B\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

   (a) [2 pt] Leg uit waarom het product AB is gedefinieerd, en bepaal de afmetingen van deze productmatrix.

   (b) [2 pt] Toon aan dat de kolommen van B lineair afhankelijk zijn.

   (c) [2 pt] Toon aan dat de kolommen van AB lineair afhankelijk zijn.

   (d) [2 pt] Wat kunt u zeggen over de eigenwaarden van de matrix AB in het geval dat $m = k$?

4. De matrix A en de vectoren $\mathbf{v}$ en $\mathbf{b}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 6 & -4 \\ -3 & 8 & 15 & -10 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ -40 \\ 43 \end{bmatrix}.$$

   (a) [2 pt] Bepaal een basis $\mathcal{B}$ van Nul A.

   (b) [1 pt] Toon aan dat $\mathbf{v} \in$ Nul A.

   (c) [2 pt] Bepaal $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$.

   (d) [2 pt] Toon aan dat $\mathbf{b} \in$ Col A.

5. De matrix A is gegeven door: $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ -2 & 2 & 6 \\ 2 & -5 & -9 \end{bmatrix}$.

   (a) [2 pt] Bereken det A.

   (b) [2 pt] Bepaal A^{-1}, indien deze bestaat.

   (c) [2 pt] Bepaal de eigenwaarden van A.

   (d) [2 pt] Onderzoek of A diagonaliseerbaar is.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten