Kenmerk : TW2010/DWMP/111/ha

Vak : **Discrete Wiskunde I voor TW/INF/BIT**
Vakcode : 191521610 (TW); 191521611 (INF/BIT)
Datum : 5 november 2010
Tijd : 08.45-11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan (ter controle).
Bij dit tentamen is een formuleblad gevoegd.

1. Gegeven is het getal $346.653.445$. Door de cijfers van dit getal te permuteren kunnen we nieuwe getallen construeren, bijvoorbeeld: $354.664.354$.

   (a) [1 pt] Hoeveel verschillende getallen zijn er op deze manier te maken?

   (b) [1 pt] Hoeveel van deze getallen zijn groter dan $500.000.000$?

   (c) [2 pt] Hoeveel van deze getallen zijn groter dan $546.000.000$?

   (d) [1 pt] Bij hoeveel van deze getallen staan alle even cijfers naast elkaar (zoals bij $534.664.453$)?

   (e) [2 pt] Bereken het aantal manieren waarop de 8 cijfers van het getal $10.000.000$ in vier (genummerde) groepen kan worden verdeeld, waarbij een groep eventueel leeg mag zijn; bijvoorbeeld:
   Groep 1: 00; Groep 2: 10000; Groep 3: leeg; Groep 4: 0.

   (f) [2 pt] Bereken het aantal manieren waarop de 8 cijfers van het getal $10.000.000$ in vier (genummerde) groepen kan worden verdeeld, waarbij minstens één groep leeg is.

2. (a) [4 pt] Bewijs de geldigheid van het volgende argument met behulp van de "Laws of Logic":

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Longleftrightarrow p \leftrightarrow \neg q.$$

   (b) [2 pt] Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld van het volgende argument:

$$\begin{array}{l} \neg\exists x\,[p(x) \wedge q(x)] \\ \forall x\,[q(x) \rightarrow r(x)] \\ \underline{\neg\forall x\,[p(x) \rightarrow \neg r(x)]} \\ \therefore \forall x\;[p(x) \rightarrow r(x)] \end{array}$$

   (c) [3 pt] Geef een bewijs voor de volgende bewering.
   Voor alle $n, m \in \mathbb{Z}$ geldt: mn is oneven dan en slechts dan als m en n beide oneven zijn.

Z.O.Z

3. (a) [2 pt] Gegeven zijn de verzamelingen $A = \{1, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$ en $C = \{3, 4, 5\}$ in een universum $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Bepaal $A - (\overline{B} \cup C)$ en $\mathcal{P}(A \Delta B)$.

   (b) [2 pt] Bewijs de volgende bewering over verzamelingen P, Q en R in een universum $\mathcal{W}$:

$$P - (Q \cup R) = (P - R) - (Q - R).$$

4. [4 pt]
Bewijs met behulp van het principe van mathematische inductie dat

voor alle $n \geq 2$ geldt: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Hierbij is: $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

5. Laat $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
De relatie R op A wordt gegeven door: $(x_1, y_1)\, R\, (x_2, y_2) \iff x_1 + y_2 = x_2 + y_1$.

   (a) [2 pt] Toon aan dat R een equivalentierelatie is op A.

   (b) [2 pt] Beschrijf de equivalentieklassen van R; teken enkele equivalentieklassen in het xy-vlak.

6. [3 pt]
Gegeven is een samenhangende graaf $G = (V, E)$ waarvan alle punten een even graad hebben. Toon aan dat voor elke $v \in V$ geldt: $\kappa(G - v) \leq \frac{1}{2} \deg(v)$.
($\kappa(G - v)$ is het aantal componenten van de deelgraaf $G - v$)

7. [3 pt]
Een *bos* is een graaf zonder cykels.
Toon aan dat voor een bos $G = (V, E)$ geldt: $|V| = |E| + \kappa(G)$.
($\kappa(G)$ is het aantal componenten van G)

Totaal: 36 + 4 = 40 punten