Tentamen Kansrekening en Statistiek (191530082) voor INF
donderdag 11 april 2013, 8.45 – 11.45 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Separaat zijn het formuleblad en de tabellen toegevoegd. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Een GR (programmeerbare rekenmachine) Is **niet** toegestaan, wel een gewone wetenschappelijke rekenmachine.

1. Aan een herhaaltentamen doen 3 TW-, 4 EL- en 5 INF-studenten mee. Bekend is geworden dat er slechts 4 van de 12 studenten geslaagd zijn. Beantwoord de volgende vragen, ervan uitgaande dat de slagingskansen voor studenten van verschillende studierichtingen gelijk zijn.

a. Bereken de kans dat alle vier geslaagden INF-studenten zijn.
b. Bereken de kans dat de vier geslaagden twee TW-ers en twee EL-ers zijn.

2. We hebben twee (uiterlijk identieke) dobbelstenen, een zuivere en een onzuivere. Bij de zuivere dobbelsteen is de kans op vijf $\frac{1}{6}$, bij de onzuivere $\frac{1}{3}$. Op goed geluk kiezen we één van de dobbelstenen en werpen hiermee tweemaal. We definiëren Z als de gebeurtenis dat we de zuivere dobbelsteen hebben gekozen. V_1 en V_2 zijn de gebeurtenissen dat we bij de eerste respectievelijk de tweede worp een vijf werpen.

a. Bereken $P(V_1)$.
b. Bereken $P(Z|V_1)$.
c. Bereken $P(Z|V_1V_2)$.

3. Doordat het toetsenbord van een computer vervuild is, komt het voor dat een toets die wordt ingedrukt toch geen signaal geeft: we zeggen dan dat het teken verdwijnt. Dit gebeurt met kans $\frac{1}{2000}$ voor de toets met het teken "E" en met kans $\frac{1}{1000}$ voor de toets met het teken "A". Voor een in te voeren tekst met 4000 E's en 1000 A's definiëren we X het aantal verdwenen E's en Y het aantal verdwenen A's. We veronderstellen dat het al dan niet verdwijnen van een teken onafhankelijk is van het al dan niet verdwijnen van tekens bij andere aanslagen.

a. Geef uitdrukkingen voor $P(X=k), E(X)$ en $var(X)$.
b. Benader de kans $P(X>4)$ met de Poisson verdeling.
c. Bereken $E(X+Y)$ en $var(X+Y)$.
d. Bereken $\rho(X, X+Y)$.

4. De bedieningsduur van klanten bij een helpdesk van een telefoonmaatschappij kan vrij goed gemodelleerd worden als een exponentiële variabele met een verwachte bedieningsduur van 3 minuten. De opeenvolgende klanten hebben bedieningsduren $X_1, X_2, \ldots$.

a. Bereken $P(X_1 > 3 \text{ en } X_2 > 3)$.
b. Leid (m.b.v. de convolutie-integraal) de kansdichtheid van $X_1 + X_2$ af.
c. Welke kansverdeling heeft $X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$ bij benadering?
d. Stel dat klant 1 en klant 2 door twee medewerkers (gelijktijdig) in bediening zijn genomen en dat na twee minuten de bediening van **klant 1 als eerste is** afgerond, wat is dan de verwachte totale bedieningsduur van klant 2? Motiveer uw antwoord.

5. Voor zoekprocedures in databestanden worden prestatiematen gebruikt waarvan veelal wordt aangenomen dat deze volgens een normale verdeling variëren (met een onbekende variantie σ^2) rondom een (onbekend) gemiddelde μ. De volgende metingen $x_1, x_2, .., x_9$ vormen een aselecte steekproef van 9 metingen voor een bepaalde zoekprocedure: 52, 54, 54, 57, 58, 59, 64, 70, 72.

   a. Geef de gebruikelijke (zuivere) schattingen van μ en σ^2.
   b. Bepaal een (numeriek) 95%-betrouwbaarheidsinterval voor σ^2.
   c. Bepaal een 95%-voorspellingsinterval voor een nog uit te voeren meting.
   d. Bepaal voor de toets $H_0: \mu = 54$ tegen $H_1: \mu > 54$ met $\alpha = 0.05$ de waarde van de toepasselijke toetsingsgrootheid, het kritieke gebied en de conclusie die je hieruit kan trekken m.b.t. μ.

6. Een scharenfabrikant wil weten hoeveel linkshandigen er in Twente zijn. Daartoe neemt hij een aselecte steekproef van n Twentenaren en bepaalt het aantal X van linkshandigen in die steekproef.
   a. Als we het percentage linkshandige Twentenaren willen bepalen m.b.v. een 90%-betrouwbaarheidsinterval met een maximale breedte van 4%, hoe groot moeten we n dan kiezen?
   b. Bepaal het 90%-betrouwbaarheidsinterval voor de fractie linkshandigen in Twente voor het geval dat in een steekproef van 240 Twentenaren er 54 linkshandig blijken te zijn.

Normering:

1		**2**			**3**				**4**				**5**				**6**		**Totaal**
a	b	a	b	c	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	
2	2	2	2	2	3	2	2	3	3	3	2	2	2	2	2	4	2	3	45

Tentamencijfer = 1 + 9 × (aantal punten)/45

Enkele formules bij Kansrekening en Statistiek voor INF (191530082)

Hypergeometrische verdeling: $var(X) = n \cdot \frac{R}{N}(1 - \frac{R}{N}) \cdot \frac{N-n}{N-1}$

Geometrische verdeling: $var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Uniforme verdeling: $var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Erlang verdeling: $f_X(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0)$

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}(X_i) + \sum\sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j)$$

Betrouwbaarheidsintervallen:

$$\left(\bar{X} - c \cdot S/\sqrt{n},\ \bar{X} + c \cdot S/\sqrt{n}\right) \text{ met } P\left(T_{n-1} \leq c\right) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2},\ \frac{(n-1)S^2}{c_1}\right) \text{ met } P\left(\chi^2_{n-1} \leq c_1\right) = \frac{1}{2}\alpha \text{ en } P\left(\chi^2_{n-1} \geq c_2\right) = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\left(\hat{p} - c\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n},\ \hat{p} + c\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}\right) \text{ met } \Phi(c) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

Voorspellingsinterval:

$$\left(\bar{X} - c \cdot S\sqrt{1 + \frac{1}{n}},\ \bar{X} + c \cdot S\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right) \text{ met } P\left(T_{n-1} \leq c\right) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$$

Verdeling	m.a. schatters	momentenschatter
Discreet:		
Poissonverdeling met par. μ	$\hat{\mu} = \bar{X}$	$\bar{X}$
Geometrische verdeling met par. p	$\hat{p} = 1/\bar{X}$	$1/\bar{X}$
$B(1,p)$-verdeling	$\hat{p} = \bar{X}$	$\hat{p} = \bar{X}$
X is $B(n,p)$-verdeeld	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$\frac{X}{n}$
Continu:		
Exponentiële verdeling met par. λ	$\hat{\lambda} = 1/\bar{X}$	$1/\bar{X}$
Uniforme verdeling op $[0,\theta]$	$\hat{\theta} = \max(X_1, \ldots, X_n)$	$2\bar{X}$
normale verdeling μ	$\hat{\mu} = \bar{X}$	$\bar{X}$
normale verdeling σ^2	$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum(X_i - \bar{X})^2$	$\frac{1}{n}\sum X_i^2 - \bar{X}^2$

De standaardnormale verdeling

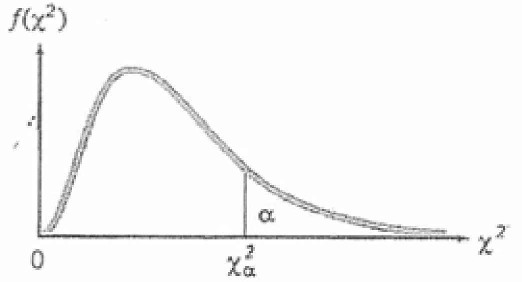
De tabel geeft de verdelingsfunctie Φ voor een standaardnormale toevalsvariabele Z:

$$\Phi(z) = \mathrm{P}(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-x^2/2} dx$$

Voorbeeld: $\Phi(1.65) = \mathrm{P}(Z \leq 1.65) = 0.9505$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Tabel VII Kritieke waarden van $\chi 2$ (chikwadraat, alleen voor $\alpha \leq 0.1$)



aantal vrijheidsgraden	$\chi^2_{0.100}$	$\chi^2_{0.050}$	$\chi^2_{0.025}$	$\chi^2_{0.010}$	$\chi^2_{0.005}$
1	2,70554	3,84146	5,02389	6,63490	7,87944
2	4,60517	5,99146	7,37776	9,21034	10,5966
3	6,25139	7,81473	9,34840	11,3449	12,8382
4	7,77944	9,48773	11,1433	13,2767	14,8603
5	9,23636	11,0705	12,8325	15,0863	16,7496
6	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	18,5476
7	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	20,2777
8	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	21,9550
9	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	23,5894
10	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	25,1882
11	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	26,7568
12	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	28,2995
13	19,8119	22,3620	24,7356	27,6882	29,8195
14	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	31,3193
15	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779	32,8013
16	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	34,2672
17	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	35,7185
18	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	37,1565
19	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909	38,5823
20	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	39,9968
21	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322	41,4011
22	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	42,7957
23	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384	44,1813
24	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798	45,5585
25	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	46,9279
26	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417	48,2899
27	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629	49,6449
28	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782	50,9934
29	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879	52,3356
30	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	53,6720
40	51,8051	55,7585	59,3417	63,6907	66,7660
50	63,1671	67,5048	71,4202	76,1539	79,4900
60	74,3970	79,0819	83,2977	88,3794	91,9517
70	85,5270	90,5312	95,0232	100,425	104,215
80	96,5782	101,879	106,629	112,329	116,321
90	107,565	113,145	118,136	124,116	128,299
100	118,498	124,342	129,561	135,807	140,169