Universiteit Twente

Afdeling Informatica,
Faculteit EWI

26 augustus 2009, 9.00-12.30

Studiejaar 2008-2009

Kwartiel 4

Tentamen

Inleiding Logica
(211112)

Gebruik van studiemateriaal bij het tentamen is toegestaan. Inleveren van werk dat niet geheel zelf is gemaakt (er is afgekeken, er zijn briefjes doorgegeven, er is met elektronische hulpmiddelen draadloos advies ingewonnen, of vergelijkbare acties) is fraude.

Uw antwoord op de gestelde vragen moet onderbouwd worden met een duidelijke motivering. Het ontbreken van een toelichting is nadelig van invloed op het aantal te behalen punten. Dat geldt ook voor het geven van een onvolledige of onduidelijke toelichting.

Er zijn totaal 90 punten te behalen. Om het cijfer te bepalen wordt het aantal behaalde punten met 10 vermeerderd. Die som wordt door 10 gedeeld. Het resultaat van die deling wordt afgerond naar een naastgelegen natuurlijke getal.

Het tentamen heeft 6 opgaven, die staan op 4 bladzijden. De opgaven zijn **niet** gerangschikt van gemakkelijk naar moeilijk (en ook niet omgekeerd)

Vermeld op elk blad dat u inlevert uw naam, uw studentnummer en de naam van het vak .

Veel succes!!

Opgave 1 (15 punten).

We beschouwen de volgende redenering:

(1) Soep wordt niet met stokjes gegeten.
(2) Alles wat op het menu staat, wordt met stokjes gegeten.
Dus
(3) Soep staat niet op het menu.

(a) Neem als context een feestmaaltijd in een Aziatisch land. Wat is in die context uw oordeel over de waarheid van de beweringen (1), (2) en (3)?

(b) In de context van de klassieke West-Europese cultuur is "met stokjes gegeten worden" mogelijk een leeg concept. Wat is uw oordeel over de waarheid van de premissen in een context waarin "met stokjes gegeten worden" een leeg concept is?

(c) In de redenering komen drie termen voor: "soep zijn", "op het menu staan" en "met stokjes gegeten worden". Welke is de middenterm, en welke is de minor term?

(d) Wat is de mood van de redenering?

(e) Is er een geldig redeneerschema toegepast? Licht uw antwoord toe door een diagram met uitleg.

Opgave 2 (15 punten).

Γ is een eindige verzameling propositielogische formules.

Geef van elk van de volgende uitspraken aan welk van de volgende drie mogelijkheden het geval is.
(i) De uitspraak is waar voor elke Γ,
(ii) De uitspraak is onwaar voor elke Γ, of
(iii) De uitspraak is waar voor sommige Γ en onwaar voor andere.

Beargumenteer uw antwoord, uitgaande van een standaard semantische en syntactische sequent. Als uw antwoord "sommige" is (optie (iii)), geef dan voorbeelden van verzamelingen Γ waarvoor de uitspraak waar is en waarvoor de uitspraak onwaar is.

(a) Als Γ consistent is dan bestaat een formule φ zodat $\Gamma \not\models \varphi$.

(b) Als $\Gamma \vdash \varphi$ voor een zekere φ, dan is deze φ een noodzakelijke waarheid.

(c) Voor alle φ en ψ geldt dat als $\Gamma \vdash \neg\varphi$ en $\Gamma \nvdash \psi$, dan $\Gamma \not\models \neg\psi \rightarrow \varphi$.

(d) Voor alle φ en ψ geldt dat $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$, dan $\Gamma \models \varphi$ of $\Gamma \not\models \psi$.

Opgave 3. (15 punten)

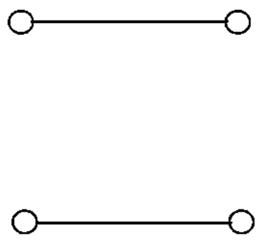
Toon met de tableaumethode aan dat $\forall x \exists y\, (A(x) \rightarrow B(y)) \vdash (\forall x\, \neg A(x)) \vee (\exists y\, B(y))$.

Opgave 4 (15 punten).

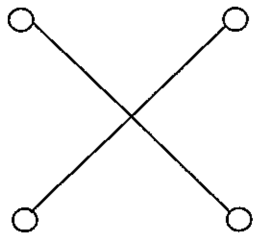
We beschouwen structuren met de volgende signatuur:

- er zijn geen bijzondere elementen, aangeduid met een constante,
- er is één tweeplaatsige relatie.

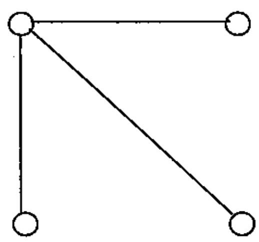
In alle structuren in deze opgave, is de tweeplaatsige relatie symmetrisch. We tekenen plaatjes van dergelijke structuren door de individuen voor te stellen als punten (kleine cirkeltjes), en het bestaan van de relatie tussen twee individuen door een verbindingslijn tussen het ene punt en het andere. Zie de onderstaande vier plaatjes.



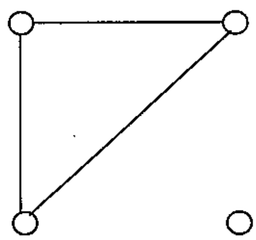
1



2



3



4

De taal die hierbij hoort is de taal van de predicaatlogica met één tweeplaatsig predicaatsymbool. We gebruiken daarvoor de letter N. (Staat voor *Neighbour*). De symmetrie van de relatie N wordt uitgedrukt door de zin

$\forall x \forall y\, (\mathrm{N}(x,y) \rightarrow \mathrm{N}(y,x))$.

Punten waartussen de relatie N bestaat, noemen we "buren".

(a) Geef van de volgende drie zinnen aan in welke van de getekende structuren zij waar zijn :

$\forall x \exists y\, \mathrm{N}(x,y)$

$\forall x \forall y \forall z\, ((\mathrm{N}(x,y) \wedge \mathrm{N}(x,z)) \rightarrow y=z)$

$\exists x \forall y\, (y = x \vee \mathrm{N}(y,x))$

(b) Formuleer een predicaatlogische zin φ die de structuur van plaatje 4 onderscheidt van de andere drie structuren. Dat wil zeggen dat φ waar is in plaatje 4, en niet waar in de plaatjes 1, 2 en 3.

(c) Kunt u een predicaatlogische zin ψ formuleren die de structuren van de plaatjes 1 en 2 van elkaar onderscheidt? Dus een ψ die waar is in de ene en onwaar in de andere.

(d) Klopt het dat de zin $\exists x \exists y \exists z\ ((N(x,y) \wedge N(x,z) \wedge N(y,z))$ uitdrukt dat er een driehoek van buurpunten in de structuur voorkomt (zoals in plaatje~~3~~)? 4

(e) Formuleer een predicaatlogische zin die uitdrukt dat elk individu precies twee buren heeft. Kunt u twee structuren met vier punten aangeven, anders dan de structuren van de plaatjes, waarin deze zin waar is? En welke zin onderscheidt uw twee structuren? D.w.z.: geef bij de structuren die u tekent ook een predicaatlogische formule die waar is in de ene structuur, maar niet in de andere.

Opgave 5 (15 punten).

(1) Wie talent heeft, heeft geen platvoeten
(2) Sommige dichters hebben platvoeten
Dus
(3) Sommige dichters hebben geen talent

Vertaal deze redenering naar predicaatlogica, en laat met natuurlijke deductie zien dat hij geldig is.

Opgave 6 (15 punten).

In de taal van de Peano rekenkunde bestaat een formule $\varphi_{neg}(x)$ met de volgende eigenschap: PA $\vdash \varphi_{neg}(\underline{m})$ dan en slechts dan als het nummer $\underline{m}$ het Gödelnummer van een negatie is (d.w.z. het Gödelnummer van een zin met de vorm $\neg\psi$).

Laat nu $\varphi'(x)$ de formule $\neg\varphi_{neg}(x)$ zijn.

(a) Het diagonaallemma van Gödel associeert met $\varphi'(x)$ een zin ψ' die het Gödelnummer $\underline{n}$ heeft. Beschrijf nauwkeurig de eigenschap(pen) van deze ψ' en $\underline{n}$.

U raakt in een boeiend gesprek verwikkeld met iemand die dol blijkt te zijn op logica. Bij het afscheid nemen, wisselt u visitekaartjes uit. U stopt het visitekaartje dat u ontvangt weg, zonder het verder te bekijken.

Als u weken later nog eens contact wil zoeken, haalt u het kaartje tevoorschijn. Tot uw verbazing leest u: "De waarheid staat op de andere kant". U draait het kaartje om. Daar leest u: "Op de andere kant staat een leugen."

Op basis van die informatie zal het wel niet lukken opnieuw contact te leggen. Maar er doet zich ineens ook een andere vraag voor.

(b) Beschouw de waarheid (of onwaarheid) van de teksten op het visitekaartje.