Kenmerk : TW2013/DWMP/022/ha

Vak : **Lineaire Algebra voor TI-BIT**
Vakcode : 191521650
Datum : 24 juni 2013
Tijdstip : 08.45–11.45 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. De gevraagde berekeningen dienen exact te worden uitgevoerd, dus niet in decimale getallen.

1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + (\alpha+1)x_4 + 5x_5 = -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - 10x_5 = \beta \\ x_1 - x_2 + 2x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Hierbij zijn $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

(a) [2 pt] Laat A de aangevulde matrix (*augmented matrix*) zijn bij dit stelsel. Bepaal een standaardrijvorm (*echelon form*) van A.

(b) [2 pt] Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel oplosbaar is.

(c) [2 pt] Neem $\alpha = -4$ en $\beta = 3$. Bepaal de oplossingsverzameling en schrijf deze in parametrische vectorvorm.

(d) [3 pt] Neem $\alpha = 0$ en $\beta = 1$. Bepaal een basis voor Col A en bepaal voor elke kolom van A de coördinaatvector ten opzichte van deze basis.

2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is de lineaire afbeelding die elk punt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ eerst spiegelt in de x_1-as en dan roteert om de oorsprong over een hoek van $\frac{\pi}{4}$ radialen (tegen de klok in). A is de representatiematrix (*standard matrix*) van T.

(a) [2 pt] Toon aan dat $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

(b) [2 pt] Bepaal het T-beeld van de vector $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(c) [2 pt] Ga na of T injectief (*one-to-one*) is en of T surjectief (*onto*) is.

Z.O.Z

3. Van een 5×5-matrix A is gegeven dat A precies vier verschillende eigenwaarden heeft. Bovendien is gegeven dat: dim Nul $A = 2$.

   (a) [1 pt] Bepaal rank A.

   (b) [1 pt] Wat kunt u zeggen over det A?

   (c) [2 pt] Wat kunt u zeggen over de oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$)?

   (d) [3 pt] Toon aan dat A diagonaliseerbaar is.

4. De matrix A is gegeven door: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

   (a) [2 pt] Bereken det A.

   (b) [3 pt] Bereken A^{-1} als deze bestaat.

5. De matrix A en de vector $\mathbf{v}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) [2 pt] Toon aan, zonder de eigenwaarden van A te berekenen, dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A. Wat is de bijbehorende eigenwaarde?

   (b) [5 pt] Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.

   (c) [2 pt] Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zo dat: $A = PDP^{-1}$, of beargumenteer dat deze matrices niet bestaan.

Totaal: 36 punten

Cijfer: $1 + \dfrac{\text{aantal behaalde punten}}{4}$