Uitwerking Toets Statistiek voor TBK (201400256) – 16 januari 2015

Opgave 1

a. Het histogram is scheef naar rechts, omdat het steekproefgemiddelde 32 000 Euro hoger is dan de mediaan (*en omdat de kleinste 25% in een interval van 33 duizend Euro ligt, tegen 204 duizend voor de hoogste 25%. Evenzo is de intervallengte van* (Q_1, m) *de helft van die van* (m, Q_3).)

b. De z-score van 112 000 is $z = \frac{112000-178000}{54000} \approx -1.22$ en die van 394 000 is $z = \frac{394000-178000}{54000} \approx +4.00$

c. Omdat $Q_3 = 190000$, is de steekproeffractie $\hat{p}$ van inkomens hoger dan 190000 dus $\frac{1}{4}$ $(6 \text{ van de } 24)$

De breedte van een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de fractie van dergelijke inkomens dient hoogstens 0.08 te zijn: uit $2 \cdot c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.08$ volgt $n \geq \left(\frac{2c}{0.08}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$

Hierin is $\hat{p} \approx \frac{1}{4}$ vanwege het resultaat van de gegeven kleine steekproef en ***c*** = 1.96 uit de N(0, 1)-tabel, dus $n \geq 450.2$, dus n is minstens 451.

(*Eventueel kan* $\hat{p} = \frac{1}{2}$ *gekozen worden omdat dan altijd geldt dat* $\hat{p}(1-\hat{p}) \leq \frac{1}{4}$: *dan is* $n = 601$)

d. 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het verwachte specialisten salaris is

$$\left(\overline{X} - c\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + c\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = (178000 - 22806, 128000 + 22806) \approx (155194, 202806)$$

waarin n = 24, $\overline{x} = 192000$ en $s = 54000$ gegeven zijn en c = 2.069 uit de t_{23}-tabel.

e. Omdat de verdeling (sterk) scheef is, is de verdeling waarschijnlijk niet normaal verdeeld: dan kunnen we het in d. bepaalde interval niet gebruiken. Ook is een normale benadering (met c uit de N(0,1)-tabel) is vanwege de lage waarde van n (24 < 100) niet mogelijk.

f. We toetsen $H_0: F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ tegen $H_1: F(x) \neq \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ met $\alpha = 10\%$

Kritieke gebied: $W \leq c = 0.930$ (uit de tabel met $n = 24$ en $\alpha = 10\%$.

$W = 0.908$ ligt in het kritieke gebied, dus we kunnen de nulhypothese verwerpen: met een onbetrouwbaarheid van 10% is de verdeling van de inkomens niet-normaal.

Opgave 2

a. Het gaat hier om gepaarde waarnemingen (de taxaties betreffen steeds paargewijs dezelfde schade).
Laat $X_1, \ldots, X_7$ de zeven verschillen zijn (bedrag garage 1 minus bedrag garage 2).
De acht stappen zijn als volgt.

(1) $X_1, \ldots, X_7$ zijn onderling onafhankelijk, elk $N(\mu,\sigma^2)$ -verdeeld.

(2) We toetsen $H_0: \mu = 0$ tegen $H_1: \mu > 0$ met α = 5%

(3) $T = \frac{\overline{X}}{S/\sqrt{n}}$, waarin n = 7.

(4) Onder $H_0: T \sim t_6$

(5) Uitkomst van toetsingsgrootheid: $t = \frac{1}{\sqrt{0.86}/\sqrt{7}} \approx 2.85$.

(6) We verwerpen H_0 als $T \geq c$, met $c = 1.943$ uit de t_6 −tabel zodat $P(T_6 > c)$ = 0.05

(7) Verwerp H_0, want 2.85 > 1.943.

(8) Statistisch is aangetoond op 5% significantieniveau dat garage 1 duurder is dan garage 2.

b. p-waarde = $P(T_6 \geq 2.85)$ ligt volgens de t_6-tabel tussen 1% en 2.5% (met interpolatie vind je 1.5%)
Dus bij α ≥ 0.025 zul je H_0 verwerpen. (of als α ≥ 0.015 als je lineair geïnterpoleerd hebt).

c. We passen de tekentoets toe: er zijn 6 positieve verschillen en één positieve.

1. Model: X = “het aantal positieve verschillen” ~ B(7, p), met p = kans op positief verschil
2. Toets $H_0: p = \frac{1}{2}$ tegen $H_0: p > \frac{1}{2}$ met $\alpha = 5\%$
3. Toetsingsgrootheid X

4. Onder H_0 geldt: $X \sim B\left(7, \frac{1}{2}\right)$
5. Waargenomen $X = 6$
6. De toets is rechtseenzijdig: $X \geq c$ (bij een groot aantal positieve verschillen verwerpen we H_0)
   Als $p = \frac{1}{2}$ is $P(X = 7) = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 0.007$, $P(X = 6) = \binom{7}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 0.055$, dus het kritieke gebied is $\{7\}$.
7. Verwerp H_0 niet, want $X = 6$ ligt niet in het kritieke gebied.
8. Met onbetrouwbaarheid 5% is garage 1 niet aantoonbaar duurder.

(*met de p-waarde vinden we* $P(X \geq 6|H_0) = (1 + 7)\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 6.25\% > \alpha$, dus H_0 niet verwerpen)

Opgave 3

a. verschil in percentage mannen: 95%-BI voor $p_1 - p_2$: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm c\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}$

(p_1 hoort bij 'managers en professionals', p_2 hoort bij 'part time MBA studenten')

$c = 1.96$ uit de N(0, 1)-tabel, zodat $\Phi(c) = 0.975$, $n_1 = 162$, $n_2 = 109$ *en* $\hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.950 - 0.689 = 0.261$

$$c\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = 1.96\sqrt{\frac{0.950 \times 0.050}{162} + \frac{0.689 \times 0.311}{109}} = 1.96 \times 0.04753 = 0.093$$

95%-BI voor $p_1 - p_2$: $(0.261 - 0.093,\ 0.261 + 0.093) = (0.168,\ 0.354) = (16.8\%,\ 35.4\%)$

b. Met een betrouwbaarheid van 95% ligt het werkelijke verschil in fracties mannen tussen ca. 17 en 35%

c. Omdat het gehele interval (ruim) boven 0 is daarmee duidelijk dat het percentage mannen bij de managers en professionals groter is dan bij de MBA-studenten, met betrouwbaarheid 95%.

d. Het gaat om een betrouwbaarheidsinterval van $2000p$, waarin p het percentage mannen onder part-time studenten is. We bepalen eerst een betrouwbaarheidsinterval p met de formule voor de fractie p:

$\hat{p} \pm c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$, waarin $n = 109, \hat{p} = 0.689$ en $c = 1.645$ uit de N(0, 1)-tabel, zodat $\Phi(c) = 0.95$

Dus 90%-BI(*p*)= $\left(\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$ = (0.689 – 0.073, 0.689 + 0.073) = (0.616, 0.762)

90%-BI(2000*p*) = (2000×0.616, 2000×0.762) = (1232, 1524)

Opgave 4

a. We hebben **twee steekproeven**, die we willen vergelijken ten aanzien van de verdeling van een variabele "verkoudheid" die als uitkomsten heeft resp. "minder verkoudheden" (1), "meer verkoudheden" (2) en "geen verschil" (3). Dus een **toets op homogeniteit** van de twee verkoudheidsverdelingen omdat (de aantallen van) de twee steekproeven van tevoren gekozen zijn.

b. We definiëren N_{ij} = "aantal personen met verkoudheid *j*" voor resp. de controlegroep ($i = 1$)
en de behandelde groep ($i = 2$)

De bijbehorende (geschatte) verwachte aantallen bij gelijke veredeling zijn:

$E_{ij} = \hat{E}_0 N_{ij} = \frac{\boldsymbol{rijsom \times kolomsom}}{\boldsymbol{n}}$

	Minder verkoudheden (1)	Meer verkoudheden (2)	Geen verschil (3)	totaal
Controle groep (1)	$\boldsymbol{N_{11}}$= 39, $\boldsymbol{E_{11}}$ = 45	$\boldsymbol{N_{12}}$= 21 , $\boldsymbol{E_{12}}$= 20.5	$\boldsymbol{N_{13}}$= 40, $\boldsymbol{E_{13}}$ = 34.5	100
Behandelde groep (2)	$\boldsymbol{N_{21}}$= 51, $\boldsymbol{E_{21}}$ = 45	$\boldsymbol{N_{22}}$= 20, $\boldsymbol{E_{22}}$ = 20.5	$\boldsymbol{N_{23}}$= 29, $\boldsymbol{E_{23}}$= 34.5	100
Totaal	90	41	69	200

1. De 2 steekproeven van de controlegroep en de behandelde groep zijn onafhankelijk:
   Controle: de aantallen N_{11}, N_{12} en N_{13} zijn multinomiaal verdeeld met kansen p_{11}, p_{12} en p_{13}
   Behandeld: de aantallen N_{21}, N_{22} en N_{23} zijn multinomiaal verdeeld met kansen p_{21}, p_{22} en p_{23}
2. Toets $H_0: p_{11} = p_{21}$ en $p_{12} = p_{22}$ en $p_{13} = p_{23}$ tegen $H_1: p_{1i} \neq p_{2i}$ voor minstens één waarde van i, met α = 1%
3. Toetsingsgrootheid: $\chi^2 = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} \frac{\left(N_{ij} - \hat{E}_0 N_{ij}\right)^2}{\hat{E}_0 N_{ij}}$ met de schattingen $\hat{E}_0 N_{ij} = \frac{rijsom \times kolomsom}{n}$
4. onder H_0 heeft χ^2 een chi-kwadraat-verdeling met aantal vrijheidsgraden $df = (r-1)(c-1) = 2$
5. Uitkomst van (voor $\hat{E}_0 N_{ij}$ zie bovenstaande tabel) $\chi^2 = \frac{(39-45)^2}{45} + \cdots + \frac{(29-34.5)^2}{34.5} \approx 3.38$
6. We verwerpen H_0 als $\chi^2 \geq c$. $\alpha = 0.05$, dus uit de χ^2_2-tabel volgt c = 5.99.
7. De uitkomst $\chi^2 \approx 3.38 < 5.99$, dus H_0 niet verwerpen
8. We achten niet bewezen, bij significantieniveau 5%, dat de vitamine effect heeft op het wel of niet voorkomen van verkoudheden.