Datum: 2 april 2009 (kp)

Tentamen van Wiskunde B voor CiT (151217)
Tentamen van Statistiek voor BIT (153031)
Vrijdag 17 april 2009 van 9.00 tot 12.00 uur

Dit tentamen bestaat uit 8 opgaven, 2 tabellen en een formuleblad (2 pagina's).
Vermeld ook je studentnummer op je werk en tentamenbriefje.

Opgave 1
In zijn roman "Bomber" argumenteert Len Deighton dat een piloot in de tweede wereldoorlog 2% kans had neergeschoten te worden bij elke vlucht. In 20 vluchten heeft hij dus 40% kans neergeschoten te worden. Is dit juist of onjuist? Motiveer je antwoord.

Opgave 2
Is de bewering $P(B \mid A) = 1 - P(B \mid A^C)$ waar voor willekeurige gebeurtenissen A en B? Zo ja: toon dit aan. Zo nee: geef een tegenvoorbeeld.

Opgave 3
Het aantal brandmeldingen X in een bepaalde stad per dag wordt verondersteld Poisson verdeeld te zijn met verwachting $\mu = \lambda = 1.5$. Laat Y het aantal keren per dag zijn dat de brandweer voor andere zaken te hulp wordt geroepen. Y heeft eveneens een Poisson verdeling, met verwachting $\mu = \lambda = 3.2$. X en Y zijn onafhankelijk.

a. Bereken de kans $P(X + Y = 1)$.
b. Is $Y - X$ ook verdeeld volgens een Poisson verdeling? Motiveer je antwoord.
c. Bepaal $\mathrm{var}(3Y - 2X)$.

Opgave 4
Een bepaald soort spijker wordt verkocht in dozen. De dozen worden gevuld aan de hand van het gewicht van de inhoud, men wil echter graag een minimaal aantal spijkers garanderen. Stel het gewicht van een willekeurige spijker heeft verwachting 1.0 gram en standaardafwijking 0.2 gram. Om te vermijden dat er vaak 200 of minder spijkers in een doos terecht komen, vult men de dozen tot een inhoud van 203.6 gram bereikt is.

a. Benader de kans dat het gewicht van 200 (willekeurig gekozen) spijkers tenminste 203.6 gram bedraagt.
b. Ga na dat de kans van onderdeel a een kleine kans is en verifieer dat deze kans kleiner wordt als 200 vervangen wordt door een lager aantal.

Opgave 5
De productie van een wasmiddel heeft tot gevolg dat productiemedewerkers langdurig blootgesteld worden aan het enzym Bacilis Subtilis met als mogelijk gevolg een vermindering van de 'airflow rate'. De airflow rate is de verhouding van het maximale volume lucht die een persoon kan uitademen gedurende 1 seconde en het maximale volume lucht die een persoon kan uitademen na zo diep mogelijk te hebben ingeademd. Voor personen zonder longstoornis geldt een norm van 0.80 voor de airflow rate. Van 19 aselect gekozen medewerkers zijn de airflow rates gemeten met als resultaat (de waarden zijn gerangschikt van klein naar groot):

0.61 0.63 0.64 0.67 0.70 0.72 0.73 0.74 0.76 0.78
0.82 0.82 0.82 0.83 0.84 0.85 0.85 0.87 0.88

Ga uit van een normale verdeling, met (onbekende) verwachting μ en variantie σ^2.

a. Bereken de (steekproef)mediaan.
b. Bereken het steekproefgemiddelde.
c. Bereken de variantie van de steekproef (steekproefvariantie).
d. Ga met een (statistische) toets na of de verwachting van airflow rate van de medewerkers lager is dan 0.80 . Gebruik hierbij significantieniveau $\alpha = 5\%$ en volg het schema van acht stappen, geplaatst aan het einde van dit tentamen.

Opgave 6
Verschillen de diverse beroepsgroepen in hun eetgewoonten? Een Brits onderzoek vergeleek 98 chauffeurs en 83 conducteurs van Londense dubbeldekkers. De baan van de conducteur vraagt meer lichamelijke activiteit. Het artikel waarin verslag wordt gedaan van de studie geeft de data als: "Gemiddeld dagelijks verbruik ± de geschatte standaardafwijking van het gemiddelde". Enkele resultaten van het onderzoek staan hieronder genoemd. (Uit J.W. Marr and J.A. Heady, "Within- and between-person variation in dietary surveys: Number of days needed to classify individuals", *Human Nutrition: Applied Nutrition* 40 A (1986), blz. 347-364.)

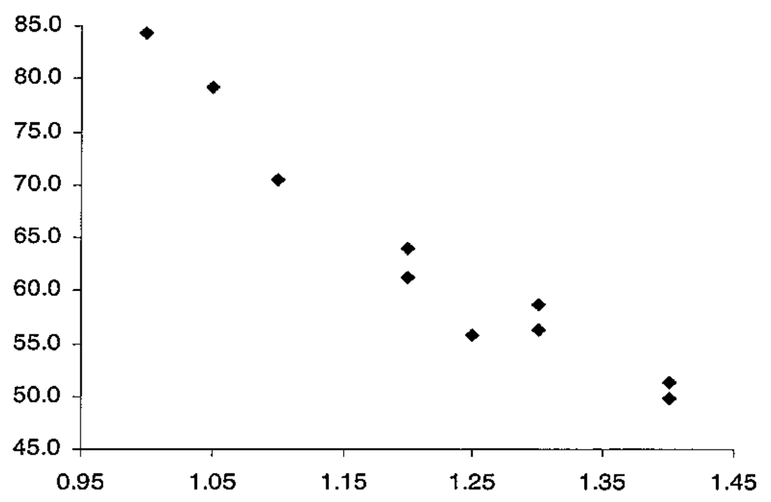
	Chauffeurs	Conducteurs
Alcoholconsumptie (grammen)	0.24 ± 0.06	0.39 ± 0.11

a. Bereken (!) de steekproefstandaardafwijking s van de dagelijkse alcoholconsumptie van de chauffeurs van Londense dubbeldekkers.
b. Bereken het 90%-betrouwbaarheidsinterval voor het verschil in verwachtingen tussen chauffeurs en conducteurs van de dagelijkse alcoholconsumptie.

Opgave 7
Een staalproducerend bedrijf maakt stalen platen ('cold reduced') en is met name geïnteresseerd in de (gemiddelde) hardheid (Rockwell 30-T) van een plaat staal als de onthardingstemperatuur op 1150 graden Fahrenheit gesteld is. Om die te schatten heeft men tien proeven genomen, resulterend in de volgende waarden voor de variabelen onthardingstemperatuur (x, eenheid: 1000 graden Fahrenheit) en hardheid (y):

meting	x	y
1	1.05	79.2
2	1.20	64.0
3	1.25	55.7
4	1.30	56.3
5	1.30	58.6
6	1.00	84.3
7	1.10	70.4
8	1.20	61.3
9	1.40	51.3
10	1.40	49.8

figuur 1: y versus x



In figuur 1 is de variabele y uitgezet tegen x. We onderzoeken wat het verband is tussen de twee variabelen. Daartoe gaan we eerst uit van enkelvoudige lineaire regressie, met y als afhankelijke variabele en x als verklarende variabele. Voor de volgende vragen mag je uitgaan van de volgende output.

Analysis of variance			
	df	SS	MS
Regression	1	1130.371	1130.371
Residual	8	72.998	9.125
Total	9	1203.369	

Estimates of regression coefficients		
	B	s.e. B
Constant	162.281	8.963
x	-81.304	7.305

	x
Steekproefgemiddelde	1.220
Steekproefvariantie	0.01900

a. Geef de (gebruikelijke) schatting voor σ^2.

b. Bereken de waarde van R^2. Geef commentaar op het resultaat.

c. Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de verwachte hardheid bij een waarde van 1.15 voor x.

Opgave 8

We gaan nog steeds uit van de situatie van opgave 7. We proberen nu het model te verbeteren door te onderzoeken of kwadratische regressie beter past bij de data. We nemen nu aan dat de waarden y_i uitkomsten zijn van stochastische variabelen

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + U_i$$

waar de storingen U_i onderling onafhankelijk zijn en $N(\mu, \sigma^2)$-verdeeld, de parameters $\beta_0, \beta_1, \beta_3$ en σ^2 zijn onbekend. De volgende output hebben we verkregen:

Analysis of variance			
	df	SS	MS
Regression	2	1174.218	587.109
Residual	7	29.151	4.164
Total	9	1203.369	133.708

Estimates of regression coefficients		
	B	s.e. B
Constant	352.023	58.787
x	-399.594	98.215
x^2	131.898	40.648

Toets de nulhypothese $H_0 : \beta_2 = 0$ tegen de alternatieve hypothese $H_1 : \beta_2 \neq 0$. Gebruik hierbij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 5% en volg de laatste zes stappen van het schema van acht stappen, geplaatst aan het einde van dit tentamen.

Normering.

1	2	3a	3b	3c	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	7a	7b	7c	8
2	2	2	2	2	3	1	1	1	1	6	1	3	1	2	2	4

Totaal: 36 punten

Schema van acht stappen.

1. Formuleer het kansmodel.
2. Formuleer nulhypothese H_0 en alternatieve hypothese H_1 in termen van de parameters van het kansmodel.
3. Formuleer een geschikte toetsingsgrootheid in termen van de voorkomende s.v.-en.
4. Geef de kansverdeling van de toetsingsgrootheid onder (het randpunt van) H_0
5. Bereken of geef de waarde van de toetsingsgrootheid.
6. Bepaal de kritieke waarde(n) en geef het kritieke gebied.

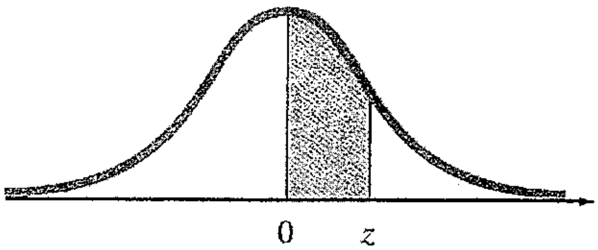
of

6^*. Bereken de overschrijdingskans.

7. Formuleer de conclusie omtrent het al dan niet verwerpen van H_0 bij de gegeven onbetrouwbaarheid(sdrempel).
8. Vermeld de conclusie in "gewone woorden".

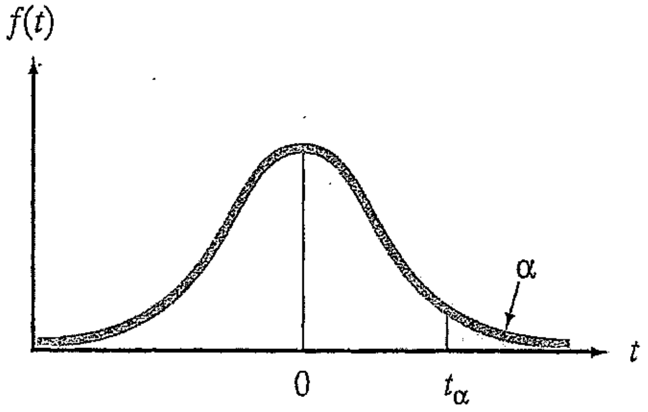
Bijlagen: $N(0,1)$-tabel, t-tabel, formuleblad (2 pagina's).

Tabel IV Oppervlakten bij de standaardnormale verdeling



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Tabel VI Kritieke waarden van t



Aantal vrijheidsgraden	$t_{0.100}$	$t_{0.050}$	$t_{0.025}$	$t_{0.010}$	$t_{0.005}$	$t_{0.001}$	$t_{0.0005}$
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Formuleblad voor de vakken 151217 en 153031 deel 1/2

Verdeling	verwachting	variantie
Binomiaal	np	$np(1-p)=npq$
Poisson	λ	λ
exponentieel	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$

Normale benadering van binomiale verdeling: toepassen als $np \geq 5$ en $n(1-p)\geq 5$.

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
$E(aX+b)=aE(X)+b$
$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$ als X en Y onafhankelijk zijn
$\mathrm{var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{var}(X)$
$\mathrm{var}(X-Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$ als X en Y onafhankelijk zijn

1 steekproef

Betrouwbaarheidsintervallen (BI's): $\overline{X}\pm t_{\alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}}$ en $\hat{p}\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

Toetsingsgrootheden: $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$ en $Z=\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sigma_{\hat{p}}}=\dfrac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{p_0q_0/n}}$

2 steekproeven

BI's: $\overline{X}_1-\overline{X}_2\pm t_{\alpha/2}\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}$ en $\hat{p}_1-\hat{p}_2\pm z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1}+\dfrac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}$

Toetsingsgrootheden: $T=\dfrac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-D_0}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$ en $Z=\dfrac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$

Met $S_p^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$ en $\hat{p}=\dfrac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$

$H_0:\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=1$ tegen $H_a:\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\neq 1$, Toetsingsgrootheid: $F=\dfrac{S_1^2}{S_2^2}$

H_0 verwerpen als (grootste steekproefvariantie)/(kleinste steekproefvariantie) $\geq F_{\alpha/2}$

Enkelvoudige lineaire regressie

$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$ $\qquad \hat{\beta}_1 = \dfrac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$ $\qquad r = \dfrac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx} SS_{yy}}}$

$SS_{xx} = \sum_i (x_i - \bar{x})^2$ $\qquad SS_{yy} = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$ $\qquad SS_{xy} = \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

Toetsingsgrootheid: $T = \dfrac{\hat{\beta}_1}{S / \sqrt{SS_{xx}}}$

Betrouwbaarheidsinterval voor β_1: $\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2} \dfrac{S}{\sqrt{SS_{xx}}}$

Betrouwbaarheidsinterval voor $E(y)$ voor $x = x_p$: $\hat{y} \pm t_{\alpha/2} S \sqrt{\dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_p - \bar{x})^2}{SS_{xx}}}$

Voorspellingsinterval voor nieuwe y voor $x = x_p$: $\hat{y} \pm t_{\alpha/2} S \sqrt{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_p - \bar{x})^2}{SS_{xx}}}$

Meervoudige lineaire regressie

$$S^2 = \frac{SSE}{n-(k+1)} = \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-(k+1)}$$

$R^2 = 1 - \dfrac{SSE}{SS_{yy}}$ $\qquad R_a^2 = 1 - \left(\dfrac{n-1}{n-(k+1)}\right)\dfrac{SSE}{SS_{yy}}$

Betrouwbaarheidsinterval voor β_i: $\hat{\beta}_i \pm t_{\alpha/2} S_{\hat{\beta}_i}$

Toetsingsgrootheden: $T = \dfrac{\hat{\beta}_i}{S_{\hat{\beta}_i}}$ en $F = \dfrac{(SS_{yy} - SSE)/k}{SSE/\big(n-(k+1)\big)} = \dfrac{R^2/k}{(1-R^2)/\big(n-(k+1)\big)}$