Mathematics C1 (Cayley)

Datum : 14 april 2014
Tijd : 08.45 – 10.45 uur

De uitwerkingen van de opgaven dienen duidelijk geformuleerd en overzichtelijk opgeschreven te worden.
Bovendien dient U in alle gevallen uw antwoord te beargumenteren!.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.

Deel 1: 18 punten

1. De matrix A en de vectoren **b** en **p** zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) [1 pt] Toon aan dat **p** een oplossing is van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) [2 pt] Bepaal de oplossingsverzameling van $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) [2 pt] Bepaal de oplossingsverzameling van $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en schrijf deze in parametrische vectorvorm.

(d) [3 pt] Bepaal alle vectoren $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ waarvoor het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ oplosbaar is. Geef uw antwoord in de vorm van een vergelijking in v_1, v_2 en v_3.

2. [4 pt]
Gegeven is de verzameling $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} \subset \mathbb{R}^n$ $(p \geq 2)$.
Bewijs dat S een lineair afhankelijk stelsel is dan en slechts dan als minstens één van de vectoren in S te schrijven is als lineaire combinatie van de overige vectoren in S.

3. Laat $p \in \mathbb{R}$ en laat $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ de lineaire afbeelding zijn gegeven door:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (px_1 - 2x_3 + px_4, 2x_2 - x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 - px_3).$$

(a) [1 pt] Bepaal het T-beeld van de vector $(1, 2, -1, 3)$.

(b) [2 pt] Bepaal de representatiematrix van T.

(c) [3 pt] Onderzoek voor welke waarden van p de afbeelding T surjectief is.

Deel 2: 18 punten

4. De matrices A en B en de vector $\mathbf{v}$ zijn gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

De kolommen van A worden genoteerd door respectievelijk $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ en $\mathbf{a}_4$.
Laat $C = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$.

(a) [3 pt] Toon aan dat $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$ en bepaal $[\mathbf{a}_4]_{\mathcal{B}}$.

(b) [2 pt] Toon aan dat $B = C^{-1}$.

(c) [2 pt] Bepaal de oplossingsverzameling van $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ door gebruik te maken van onderdeel (b).

(d) [2 pt] Bepaal $\det C$.

(e) [2 pt] Gebruik de onderdelen (b) en (d) om de volgende determinanten te bepalen: $\det B$, $\det 3C$ en $\det C^3$.

(f) [1 pt] Laat T de lineaire transformatie zijn met representatiematrix B en laat P het parallellepipidum zijn dat wordt opgespannen door de kolommen van C. Bepaal het volume van $T(P)$.

5. Gegeven is een 4×3-matrix A en een 3×4-matrix B met rang A = rang $B = 3$.
Wat zijn de gevolgen van deze gegevens voor (geef ook argumentatie!):

(a) [1 pt] De kolommen van A: zijn deze lineair afhankelijk of linear onafhankelijk?

(b) [2 pt] Het aantal oplossingen van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$)?

(c) [3 pt] Toon aan dat Nul AB = Nul B.

Totaal: 36 punten

Mathematics C1 (Cayley)

Date : April 14, 2014
Time : 08.45 – 10.45 hrs

The solutions to the exercises need to be wellstructured and clearly formulated.
Moreover, you need to motivate your answer in all cases!
The use of electronic devices is not allowed.

Part 1: 18 points

1. Consider the matrix A and the vectors **b** and **p** given by:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

(a) [1 pt] Show that **p** is a solution of the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) [2 pt] Determine the solution set of $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) [2 pt] Determine the solution set of $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and write it in parametric vector form.

(d) [3 pt] Determine all vectors $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ is consistent. Express your answer as an equation in v_1, v_2 and v_3.

2. [4 pt]
Consider the set $S = \{\, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \,\} \subset \mathbb{R}^n$ $(p \geq 2)$.
Prove that S is a linear dependent set if and only if at least one vector in S can be written as a linear combination of the other vectors in S.

3. Let $p \in \mathbb{R}$ and let $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ be the linear transformation given by:

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (px_1 - 2x_3 + px_4, 2x_2 - x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 - px_3).$$

(a) [1 pt] Determine the T-image of the vector $(1, 2, -1, 3)$.

(b) [2 pt] Determine the standard matrix of T.

(c) [3 pt] Examine for which values of p the transformation T is onto $\mathbb{R}^3$.

Part 2: 18 points

4. The matrices A and B and the vector **v** are given by:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 8 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

The columns of A are denoted by $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ and $\mathbf{a}_4$ respectively.
Let $C = [\ \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3\ ]$.

(a) [3 pt] Show that $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ is a basis for $\mathbb{R}^3$ and determine $[\mathbf{a}_4]_{\mathcal{B}}$.

(b) [2 pt] Show that $B = C^{-1}$.

(c) [2 pt] Determine the solution set of $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ by using part (b).

(d) [2 pt] Determine $\det C$.

(e) [2 pt] Use parts (b) and (d) to calculate the following determinants:
$\det B$, $\det 3C$ and $\det C^3$.

(f) [1 pt] Let T be the linear transformation with standard matrix B and let P be the parallelepiped spanned by the columns of C. Determine the volume of $T(P)$.

5. Let A be a 4×3-matrix and let B be a 3×4-matrix such that rank $A =$ rank $B = 3$.
What are the consequences of these facts for (include an argumentation!):

(a) [1 pt] The columns of A: are they linearly dependent or linearly independent?

(b) [2 pt] The number of solutions of the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$)?

(c) [3 pt] Prove that Nul $AB =$ Nul B.

Total: 18 points