Mathematics C1 (Cayley)

Date : April 15, 2016
Time : 13.45 – 15.45 hrs

The solutions to the exercises need to be wellstructured and clearly formulated.
Moreover, you need to motivate your answer in all cases!
The use of electronic devices is not allowed.

1. The matrix A and the vector $\mathbf{b}$ are given by:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \alpha \\ \alpha & -6 & 3\alpha - 2 \\ -2 & 3 & 2\alpha - 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3\alpha + 4 \\ 5 \end{bmatrix},$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) [2 pt] Show that an echelon form of the augmented matrix of the linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha - 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + 5\alpha - 14 & \alpha - 2 \end{bmatrix}.$$

Indicate in each step which elementary row-operation you use.

(b) [2 pt] Determine all values of α for which the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

(i) has no solutions.
(ii) has infinitely many solutions.
(iii) has exactly one solution.

(c) [2 pt] Take $\alpha = 2$. Determine the solution set of the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ and write it in parametric vector form.

2. The matrix A is given by:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

The columns of A are indicated by $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ and $\mathbf{a}_3$ respectively.

(a) [2 pt] Determine the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$.

(b) [2 pt] Furthermore, the matrices $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ and $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ are given. Determine k, ℓ, m and n such that both products ABC and CBA are defined.

3. De vectoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ zijn gegeven door:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2\alpha \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ \alpha - 7 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \alpha + 1 \\ 3 \\ \alpha + 3 \end{bmatrix},$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) [3 pt] Toon aan dat het stelsel $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineair onafhankelijk is dan en slechts dan als $\alpha \notin \{-\frac{5}{2}, 1\}$.

(b) [2 pt] Bepaal alle waarden van α waarvoor geldt: $\mathbf{v}_1 \in \text{Span}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

(c) [2 pt] Neem $\alpha = 1$. Bepaal een basis voor de lineare deelruimte $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

4. [2 pt]
Gegeven zijn de $n \times n$-matrices A en B.
Toon aan dat als AB inverteerbaar is, dan zijn ook A en B inverteerbaar.

5. [3 pt]
Bepaal de oppervlakte van de driehoek met hoekpunten $(3, 1)$, $(-1, 4)$ en $(8, -1)$.

6. De matrix A is gegeven door: $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$.

Verder is gegeven dat $\lambda = 2$ een eigenwaarde is van A.

(a) [3 pt] Bepaal alle eigenwaarden van A.

(b) [2 pt] Bepaal de eigenruimte van A bij eigenwaarde 2.

7. [4 pt]
Laat $\mathbf{x}$ een eigenvector zijn van matrix A, corresponderend met eigenwaarde λ.
Bewijs, met volledige inductie naar k, dat voor alle $k \geq 1$ geldt: $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$.

8. Van de lineaire afbeelding $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is gegeven dat

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(a) [3 pt] Bepaal de representatiematrix van T.

(b) [2 pt] Bepaal alle vectoren die door T op $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ worden afgebeeld.

Indien u niet uit onderdeel (a) bent gekomen mag u hier gebruik maken van de representatiematrix

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Totaal: 36 punten