Uitwerking Tentamen Kansrekening en Statistiek voor INF (153008) en TEL (153034)
dd 13 april 2004

1. Beoordeling: steeds 2 punten voor een juist antwoord + motivatie
   a. Niet waar: Elkaar uitsluiten betekent $P(A \cap B) = 0$, dan zijn A en B i.h.a. afhankelijk, ofwel $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ (tenzij P(A) of P(B) 0 is).
   b. Waar: X is B(250, 0.02)-verdeeld (bij trekken zonder terugleggen bij benadering). Voor grote n en kleine p kunnen we de binomiale verdeling benaderen met de Poisson verdeling met $\mu = np = 250 \times 0.02 = 5$.
   c. Niet waar: als $\rho(X, Y) = 0$, is er geen lineaire samenhang, maar wellicht wel een andere vorm van samenhang.
   d. Niet waar: als overschrijdingskans < α kan H_0 verworpen worden (de kans op een dergelijke uitkomst gegeven dat H_0 waar is, is zeer klein)

2.
   a. $P(X = 0) = 0.83 + 0.03 + 0.01 = 0.87,$
   $P(X = 1) = 0.03 + 0.04 + 0.01 = 0.08,$
   $P(X = 2) = 0.02 + 0.01 + 0.02 = 0.05.$
   $EX = 0 \times 0.87 + 1 \times 0.08 + 2 \times 0.05 = 0.18$
   $\text{var}(X) = E(X^2) - (EX)^2$
   $E(X^2) = 0^2 \times 0.87 + 1^2 \times 0.08 + 2^2 \times 0.05 = 0.28$
   en dus is $\text{var}(X) = 0.28 - (0.18)^2 = 0.25.$
   b. X en Y zijn afhankelijk want bijv:
   $0.87 \times 0.87 = P(X = 0)P(Y = 0) \neq P(X = 0 \text{ en } Y = 0) = 0.83$
   c. $P(U = 0) = P(X = 0 \text{ en } Y = 0) = 0.83$
   $P(U = 1) = P(X = 0 \text{ en } Y = 1) + P(X = 1 \text{ en } Y = 0) + P(X = 1 \text{ en } Y = 1)$
   $= 0.03 + 0.03 + 0.04 = 0.1.$
   en P(U = 2) = 1- P(U=1) – P(U = 0) = 0.07

3. In onderstaande uitwerking is steeds $Z \sim N(0,1)$

a. $P(X \leq 0) = P((X - 10)/5 \leq (0 - 10)/5) = P(Z \leq -2) = 2.28\%$ en
$P(Y \leq 0) = P(Z \leq -1) = 15.87\%$

b. project 2: de verwachte winst is dan namelijk groter (12 tegen 10 bij project 1), ook al is de *kans op verlies* bij dit project groter.

c. $P(X + Y \geq 25) = P(Z \geq -0.23) = P(Z \leq 0.23) = 40.9\%$ omdat $X + Y \sim N(10+12, 25+144)$

d. $P(X \geq Y) = P(X - Y \geq 0) = P(Z \geq 0.15) = 44.0\%$ omdat $X - Y \sim N(10-12, 25+144)$

4.

a. X is, gegeven N=7, B(7,0.3), dus $E(X|N=7) = np = 2.1$

b. $P(X = 2 \text{ en } N = 7) = P(N = 7) \times P(X = 2 | N = 7) = \frac{e^{-6}6^7}{7!} \times \binom{7}{2} 0.3^2 0.7^5 = 0.1377 \times 0.3177 = 4.37\%$

.

c. $P(X = 2) = \sum_{n=2}^{\infty} P(X = 2 \;\; en \;\; Z = z) = \sum_{n=2}^{\infty} (P(X = 2 | N = n) P(N = n) = \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} 0.3^2 0.7^{n-2} \times \frac{e^{-6}6^n}{n!}$

$$= \frac{0.3^2 \times 6^2 \times e^{-1.8}}{2} \sum_{n=2}^{\infty} 4.2^{n-2} e^{-4.2}/(n-2)! = \frac{1.8^2 e^{-1.8}}{2!} \approx 26.8\%$$

5.

a. $\bar{x} = 1020$ en $s^2 = 400$

b. Kansmodel: de dagproducties $X_1, \ldots, X_5$ zijn o.o. en alle $N(\mu,\sigma^2)$-verdeeld, met onbekende μ en σ^2. We gebruiken dus de formule:

$$95\%\text{-BI}(\sigma^2) = \left(\frac{(n-1)s^2}{c_2}, \frac{(n-1)s^2}{c_1}\right) \approx (144, 3306) \text{ met } s^2 = 400,\ n = 5$$

en uit de χ_4^2-tabel: $c_1 = 0.484$ en $c_2 = 11.1$ zodat $P(\chi_4^2 \le c_1) = P(\chi_4^2 \ge c_2) = 0.025$

c. We hanteren hetzelfde kansmodel als bij b:

$$95\%\text{-BI}(\mu) = \left(\bar{x} - c\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + c\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \approx (995, 1045), \text{ waarin } n = 5,\ \bar{x} = 1020,\ s^2 = 400$$

en c uit de t_4-tabel, zodat $P(T_4 < c) = 0.975$, dus $c = 2.78$

De oude gemiddelde dagproductie 1000 ligt binnen het 95%-BI(μ), dus dat de dagproductie *niet* is toegenomen, is zeker niet uitgesloten. Advies is niet veranderen.

6.

a. Kansmodel: X= "het aantal VVD-ers in de steekproef" ~ B(290,p)

$$90\% - BI(p) = \left(\hat{p} - c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) \approx (0.208, 0.292),$$ (dus tussen 21 en 29%), waarin $n = 290$, $\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{72}{290}$ en $c = 1.645$ uit de $N(0,1)$-tabel zodat $P(Z<c) = 0.95$

b. De toetsingsprocedure toegepast:

(1) X is het aantal stemmers op VVD, CDA en D66 in de steekproef: X is $B(290, p)$-verdeeld met onbekende kans p (= aanhang regeringspartijen in populatie UT-studs).

(2) Toets $H_0: p = 0.50$ (of $H_0: p \le 0.50$) tegen $H_1: p > 0.50$ (met $\alpha = 0.05$).

(3) Toetsingsgrootheid: X is, onder H_0, $B(290, 0.50)$-verdeeld is

(4) Waargenomen: X = 72+58+24 = 160

(5) Rechtseenzijdige toets: H_0 verwerpen als $X \ge c$

eis: $P(X \ge c \mid p = 0.5) \le 5\%$

Normale benadering: $X \sim N(np, np(1-p)) = N(145, 72.5)$

Dus $P(X \ge c) = P(X > c - 0.5)$ (continuïteitscorrectie)

$$= P\left(Z > \frac{c - 0.5 - 145}{\sqrt{72.5}}\right) \le 5\%$$ (N(0,1)-tabelwaarde 1.645 bij 95%)

$c \ge 145.5 + 1.645 \times \sqrt{72.5} = 159.5$. Kies dus $c = 160$

(6) Uitkomst x =154 ligt niet in het kritiek gebied $\Rightarrow H_0$ niet verwerpen

(7) We achten het niet bewezen (bij onbetrouwbaarheidsdrempel 5%) dat de regeringspartijen onder de UT-studenten een meerderheid bezitten.

[(5) en (6) met overschrijdingskans $P(X \ge 154 \mid p=0.5) \approx 16\% > \alpha \Rightarrow H_0$ niet verwerpen]