Kenmerk:
Datum: 3 september 2014

Tentamen Kansrekening en Statistiek (153008) voor INF en TEL

Donderdag 6 april 2006, 13.30-16.30 uur

Dit tentamen bestaat uit 5 opgaven. Separaat zijn het formuleblad en tabellen toegevoegd. Vermeld ook uw studentnummer en studierichting op uw werk en tentamenbriefje.

1. Bereken de gevraagde kans in elk van onderstaande gevallen, nadat je eerst een relevante stochastische variabele (of meerdere) hebt gedefinieerd en de toepasselijke verdeling hebt vermeld. Motiveer kort je keuze.

   a. De gemeenteraad bestaat uit 20 personen, waarvan 6 uit partij A. Ten behoeve van de benoeming van een burgemeester moet een vertrouwenscommissie van 5 personen worden samengesteld en men besluit deze commissie via loting onder alle raadsleden aan te wijzen. Hoe groot is de kans dat er minstens 1 lid van partij A in de commissie komt?

   b. Informaticastudenten hebben een gemiddeld IQ van 118 en de standaardafwijking is 10. Wat is het percentage hoogbegaafde Informaticastudenten, met een IQ groter dan 140?

   c. De Laerdaltunnel, op de verbinding van Oslo naar Bergen, is 25 km lang en vooral gegraven vanwege de onbegaanbaarheid van het berggebied aldaar in de winter. Op een dag maken 10000 auto's gebruik van de tunnel. Als de kans op een lekke band voor auto's in Noorwegen 0.00002 bij een rit over 25 kilometer, hoe groot is dan de kans dat de Noorse ANWB op die dag meer dan 2 keer moet uitrukken voor lekke banden in de tunnel?

   d. Jan en Klaas houden een weddenschap: elke week kopen zij allebei een kraslot totdat één van hen (of beiden) prijs heeft. Degene die prijs heeft, trakteert op een avondje casino. Neem aan dat de kans op prijs bij een kraslot 5% is. Hoe groot is de kans dat het meer dan 10 weken duurt voordat ze naar het casino gaan?

2. (Borstkankeronderzoek)
   In het kader van screening van borstkanker wordt bij vrouwen boven de 50 jaar eens per twee jaar een röntgenfoto van de borsten gemaakt. Bij vrouwen met borstkanker komt de röntgenoloog in 90% van de gevallen tot een vermoeden van borstkanker op basis van de röntgenfoto. Het nadeel van deze test met de röntgenfoto is dat ook bij 2% van de vrouwen zonder borstkanker een vermoeden van borstkanker wordt geconstateerd (zg. vals-positieven). Voor een populatie wordt aangenomen dat 5% van de vrouwen ten tijde van de test borstkanker heeft.

   a. Toon aan dat de kans op een positief testresultaat (vermoeden van borstkanker) bij een willekeurige vrouw uit de populatie gelijk is aan 6.4%. Definieer daartoe eerst relevante gebeurtenissen en beschrijf de gegeven kansen als (voorwaardelijke) kansen.

   b. Toon ook aan dat een vrouw, bij wie op grond van de röntgenfoto borstkanker wordt vermoed, met een kans van (afgerond) 70% daadwerkelijk borstkanker heeft?

(Vervolg opgave 2)
In 6.4% van de gevallen wordt volgens onderdeel a borstkanker vermoed. Vervolgens toont een punctie in 70% van de gevallen (zie onderdeel b) aan dat het vermoeden terecht is. We nemen aan dat een punctie (nagenoeg) 100% zekerheid geeft.
Stel dat in een bepaalde periode 100 vrouwen worden onderzocht. Zij X het aantal vrouwen bij wie borstkanker wordt vermoed op basis van de röntgenfoto en Y het aantal vrouwen bij wie na de punctie daadwerkelijk borstkanker wordt geconstateerd.

c. Geef de kansverdeling van X, $E(X)$ en $var(X)$

d. Bereken $P(Y=7 \mid X=10)$ en $E(Y \mid X=10)$

e. Bepaal $P(Y=7)$. U kunt bij het geven van het antwoord eventueel volstaan met een rekenkundige formule (een sommatie van bekende termen).

f. Wat is de kans dat een vrouw uit de populatie een punctie moet ondergaan en dat deze borstkanker uitwijst? Wat is dus de kansverdeling van Y?

3. Bij massaproductie van sensoren wordt de kwaliteit van de sensoren voortdurend gecontroleerd. Indien na een periode van X tijdseenheden de kwaliteit ondermaats blijkt, wordt het productieproces stilgelegd voor verbetering. Na Y tijdseenheden wordt het productieproces weer opgestart.
We nemen aan dat X en Y onderling onafhankelijk zijn en beide exponentieel verdeeld, X met een verwachting van 5 tijdseenheden en Y met een verwachting van 1 tijdseenheid.
$Z = X + Y$ is de tijdspanne tussen 2 opstartmomenten.

a. Bepaal $E(Z)$ en $var(Z)$.

b. Bepaal $\rho(X, Z)$.

c. Leid m.b.v. convolutie-integraal de kansverdeling van Z af.

Gedurende een langere periode beschouwen we het productieproces: $Z_1, \dots , Z_n$ zijn de tijdspannen tussen de verschillende opstartmomenten.

d. Welke benaderende kansverdeling (geef ook de parameters) kunnen we voor $\sum_{i=1}^{100} Z_i$ gebruiken? Geef ook eventuele veronderstellingen.

4. De simultane kansdichtheid van X en Y wordt gegeven door
$f(x,y) = xy$ voor $0 \le x \le 1$ en $0 \le y \le 2$ (en $f(x,y) = 0$ elders)

a. Laat zien dat $f_X(x) = 2x$ voor $0 \le x \le 1$ en
$f_Y(y) = ½ y$ voor $0 \le y \le 2$

b. Bereken $E(X)$, $E(Y)$ en $E(XY)$

c. Zijn X en Y o.o.? Motiveer uw antwoord.

d. Bereken $P(X > Y)$.

5. Een taxibedrijf vermoedt dat de banden van een bepaald merk minder kilometers meegaan dan dat de leverancier claimt. De claim is dat de gemiddelde levensduur μ van de banden 57000 km (of meer bedraagt). Daartoe heeft het bedrijf de levensduur van een 10-tal banden (van 10 verschillende taxi's) gemeten en kwam men tot de volgende meetgegevens (in 1000 km):   48, 53, 45, 61, 59, 56, 63, 49, 53, 54

   a. Bereken het steekproefgemiddelde en de steekproefvariantie.

   b. Geef de definitie van de verwachte kwadratische fout en laat zien dat het steekproefgemiddelde op basis van 10 levensduren een betere schatter is van μ dan het steekproefgemiddelde van 5 levensduren.

   c. Geef een 95%-voorspellingsinterval voor de levensduur van een band die vandaag in gebruik genomen wordt.

   d. Geef een 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de standaardafwijking van de levensduur van een band.

   e. Voer een toets uit met $\alpha = 0.05$, waaruit blijkt of de claim van de leverancier op basis van deze meetgegevens verworpen kan worden.

Normering:

1				2						3				4				5					
a	b	c	d	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	e	Totaal
3	3	4	4	4	2	3	2	1	2	3	2	2	2	3	3	2	2	1	3	3	3	5	62

Cijfer tentamen c = 9* aantal punten/62 + 1
Eindcijfer vak = [16*c + max(c, opdr.1) + max(c, opd.2) + max(c, opd.3) + max(c, opd.4)]/20

Bijlage:
Formuleblad
N(0,1)-tabel
t-tabel
χ^2-tabel
Poisson-tabel.