Kenmerk : TW2009/DWMP/85/ha

Vak	:	**Lineaire Algebra voor INF/BIT/TEL**
Vakcode	:	152165
Datum	:	23 juni 2009
Tijdstip	:	13.30–16.30 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. De gevraagde berekeningen dienen <u>exact</u> te worden uitgevoerd, dus niet in decimale getallen.

1. Gegeven is het stelsel lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + \alpha x_2 - 6x_3 = \beta \end{cases}$$

Hierbij zijn α, $\beta \in \mathbb{R}$. A is de coëfficiëntenmatrix bij dit stelsel.

(a) [3 pt] Bepaal alle waarden van α en β waarvoor het stelsel oplosbaar (*consistent*) is.

(b) [2 pt] Neem $\alpha = 14$ en $\beta = 2$. Bepaal de oplossingsverzameling van bovengenoemd stelsel en schrijf deze in parametrische vectorvorm.

(c) [1 pt] Bepaal alle waarden van α waarvoor geldt:
het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is oplosbaar voor <u>alle</u> $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$.

(d) [3 pt] Neem $\alpha = 13$. Toon aan dat $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$ en geef de coördinaatvector van $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ t.o.v. deze basis.

2. De matrices A en B en de vector $\mathbf{v}$ zijn is gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

T is de lineaire afbeelding met representatiematrix (*standard matrix*) A.

(a) [2 pt] Bereken de volgende producten, indien ze gedefinieerd zijn:
AB, BA en $\mathbf{v}^T A$.

(b) [2 pt] Toon aan dat $\mathbf{v} \in \text{Col } A$.

(c) [2 pt] Ga na of de kolommen van A een lineair onafhankelijk stelsel vormen.

(d) [2 pt] Bepaal een basis voor Nul B.

(e) [2 pt] Ga na of T surjectief (*onto*) is en of T injectief (*one-to-one*) is.

Z.O.Z

3. Van een 5×5-matrix A is gegeven dat A precies vier verschillende eigenwaarden heeft. Bovendien is gegeven dat: dim Nul $A = 2$.

(a) [1 pt] Bepaal rank A.

(b) [1 pt] Wat kunt u zeggen over det A?

(c) [2 pt] Wat kunt u zeggen over de oplossingsverzameling van het stelsel $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$)?

(d) [3 pt] Toon aan dat A diagonaliseerbaar is.

4. De matrix A en de vector $\mathbf{v}$ zijn is gegeven door:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) [2 pt] Bereken det A.

(b) [2 pt] Bepaal A^{-1}, indien deze bestaat.

(c) [2 pt] Toon aan dat $\mathbf{v}$ een eigenvector is van A. Bij welke eigenwaarde?

(d) [2 pt] Bepaal alle eigenvectoren van A bij de eigenwaarde uit onderdeel (c).

(e) [2 pt] Bepaal alle eigenwaarden van A.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten