Kenmerk: EWI04/T-DWMP/11/dh

Tentamen Deterministische Modellen in de OR

Maandag 16 juni 2008, 13.30 – 16.30 uur
vakcode 158075

Opmerking vooraf: Geef bij elke opgave een volledige en duidelijke uitwerking inclusief argumentatie! Gebruik van de rekenmachine is niet toegestaan.

1. **(5 punten)**
   Beschouw het volgende LP-probleem (P):

$$\begin{array}{llrcrcl} \max z & = & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{s.t.} & & x_1 & + & x_2 & \geq & 3 \\ & & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ & & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   (a) Breng het probleem (P) in standaardvorm.

   (b) Los (P) op met een simplex methode.

2. **(9 punten)**
   Gegeven is het volgende LP-probleem (P):

$$\begin{array}{llrcrcrl} \max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & \\ \text{s.t.} & & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 8 \\ & & x_1 & + & x_2 & & & \leq 10 \\ & & x_1 & + & 3x_2 & & & \geq 20 \\ & & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

   Het bijbehorende optimale tableau ziet er als volgt uit:

z	x_1	x_2	x_3	s_2	e_3	RHS
1	1		3			16
	5		3		1	4
	-1		-1	1		2
	2	1	1			8

   (a) Bepaal het bij (P) behorende duale LP-probleem (D).

   (b) Geef de optimale oplossing van (P) en (D) (waarden variabelen en doelfunctie).

(c) Stel de doelfunctiecoëfficiënt van x_3 wordt $-1+\Delta$. Voor welke waarden van Δ blijft de gegeven basis optimaal?

(d) Stel er komt een 4de variabele x_4 bij met als kolom voor de voorwaarden $\mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ en als doelfunctiecoëfficiënt $c_4 = \Delta$. Voor welke waarden van Δ blijft de gegeven basis optimaal.

(e) Wat zijn de gereduceerde kosten van x_1 in het optimale tableau.
Geef ook aan wat de betekenis is van deze gereduceerde kosten.

3. **(6 punten)**
Winco verkoopt vier types produkten. De benodigde resources om een eenheid van een produkt te produceren en de verkoopprijs zijn:

Resource	Prod.1	Prod.2	Prod.3	Prod.4
Materiaal	2	3	4	7
Werkuren	3	4	5	6
Verkoopprijs (Euro)	4	6	7	8

Winco heeft 4600 eenheden materiaal en 5000 werkuren ter beschikking. In totaal is er vraag naar 950 eenheden van de produkten, waarbij tenminste 400 eenheden van Produkt 4 moeten zijn. Doel is aan de vraag te voldoen met maximale opbrengst.

Het bijbehorende LP in LINDO:

max $4X1 + 6X2 + 7X3 + 8X4$
subject to
2) $X1 + X2 + X3 + X4 = 950$
3) $X4 \geqq 400$
4) $2X1 + 3X2 + 4X3 + 7X4 \leqq 4600$
5) $3X1 + 4X2 + 5X3 + 6X4 \leqq 5000$

De output van LINDO:
LP optimum found at step 4

Objective function value

1) 6650.00000

Variable	Value	Reduced cost
X1	0.000000	1.000000
X2	400.000000	0.000000
X3	150.000000	0.000000
X4	400.000000	0.000000

Row	Slack or surplus	Dual prices
2)	0.000000	3.000000
3)	0.000000	-2.000000
4)	0.000000	1.000000
5)	250.000000	0.000000

No. iterations = 4

Ranges in which the basis is unchanged:

	obj coefficient ranges		
Variable	current coef.	Allowable increase	Allowable decrease
X1	4.000000	1.000000	Infinity
X2	6.000000	0.666667	0.500000
X3	7.000000	1.000000	0.500000
X4	8.000000	2.000000	Infinity

	Righthand side ranges		
Row	current rhs.	Allowable increase	Allowable decrease
2	950.000000	50.000000	100.000000
3	400.000000	37.000000	125.000000
4	4600.000000	250.000000	150.000000
5	5000.000000	Infinity	250.000000

(a) Hoe ziet de optimale produktie er uit en hoe groot is de bijbehorende opbrengst?

(b) Voor welke verkoopprijs van produkt 3 blijft de oplossing uit a) optimaal?

(c) Voor welk aantal ter beschikking staande werkuren blijft de onder a) gevonden basis optimaal?

(d) Stel de verkoopprijs van produkt 3 gaat met 50 cent en de verkoopprijs van produkt 4 met 1 Euro omhoog. Blijft de oplossing uit a) optimaal?

(e) Wat is de schaduwprijs van een eenheid materiaal.

4. **(5 punten)**
Gegeven is een project met 8 activiteiten, waarvoor de volgende gegevens bekend zijn:

Activiteit	Predecessors	Tijd
A	—	3
B	—	3
C	—	1
D	AB	3
E	AB	3
F	BC	2
G	DE	4
H	E	3

(a) Geef het bijbehorende AOA netwerk.

(b) Bepaal het kritieke pad van het netwerk en de totale float en free float voor iedere activiteit.

5. **(6 punten)**
Het bedrijf DetMOR verkoopt ILP solvers. De jaarlijkse vraag naar ILP solvers is als volgt; Europa: 100.000; Azië: 150.000; Afrika: 110.000; Amerika: 90.000. DetMOR overweegt de solvers in vier verschillende steden te laten produceren: Enschede, Tokio, New York en Durban. De produktiekosten voor een ILP solver samen met de kosten om de solver naar de regio's te transporteren zijn als volgt:

		1	2	3	4
		Europa	Azië	Afrika	Amerika
1	Enschede	10	30	28	24
2	Tokio	34	18	23	36
3	New York	22	32	28	14
4	Durban	22	21	8	31

In iedere stad kunnen 150.000 ILP solvers per jaar geproduceerd worden. De jaarlijkse vaste kosten om een produktie eenheid in de steden te hebben, zijn als volgt

	Enschede	Tokio	New York	Durban
vaste kosten	6.000.000	5.500.000	5.800.000	6.200.000

Minstens 50.000 ILP solvers van de vraag uit Afrika moet uit Durban komen of minstens 50.000 ILP solvers van de vraag uit Afrika moet uit Enschede komen.
Formuleer een geheeltallig lineair programma (ILP), waarmee DetMOR de jaarlijkse kosten kan minimaliseren om aan de vraag naar ILP solvers te voldoen.
Geef een duidelijke definitie van de variabelen en een duidelijke verklaring van de voorwaarden en de doelfunctie.

6. **(6 punten)**
Neem aan dat voor een drietal irrigatieprojecten een totale hoeveelheid water ter grootte van Q m^3 beschikbaar is. Toewijzing van een hoeveelheid x m^3 aan een project j ($j = 1, 2, 3$) geeft een netto opbrengst $R_j(x)$. Neem aan dat $Q = 5$. De netto opbrengst (in honderdduizend euro's) wordt gegeven door de getallen in volgende tabel.

j	1	2	3
$R_j(0)$	0	0	0
$R_j(1)$	-0.5	6.5	-6.9
$R_j(2)$	3.0	10.1	0
$R_j(3)$	6.6	10.9	6.3
$R_j(4)$	10.0	9.6	11.5
$R_j(5)$	13.1	7.0	15.6

Bepaal de optimale toewijzing van water aan de 3 projecten m.b.v. dynamische programmering. Bepaal daartoe eerst achtereenvolgens: de fasen, de toestanden, de beslissingen, de opbrengstfunctie en de recursieformule voor de opbrengstfunctie. Bereken dan met behulp hiervan de optimale toewijzing.

Normering:

1.(a):	1	2.(a):	2	3.(a):	1	4.(a):	2	5.:	5	6.:	6
(b):	4	(b):	2	(b):	1	(b):	3				
		(c):	1	(c):	1						
		(d):	2	(d):	2						
		(e):	2	(e):	1						

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten.

Hulpmiddel: Tableau behorende bij een basis B

z	BV	NBV	RHS
1	0	$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}N - \mathbf{c}_{NBV}$	$\mathbf{c}_{BV}B^{-1}\mathbf{b}$
0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}\mathbf{b}$