

Tentamen Kansrekening en Statistiek (153008) voor INF en TEL
donderdag 3 april 2008, 13.30 – 16.30 uur

Dit tentamen bestaat uit 6 opgaven. Separaat zijn het formuleblad en tabellen toegevoegd. Vermeld ook uw studentnummer en studierichting op uw werk en tentamenbriefje.

1. Een loterij bestaat uit 100 loten. Er zijn 4 hoofdprijzen en 10 troostprijzen. Trekking van de winnende lotnummers vindt plaats zonder teruglegging. Bereken de kans dat iemand die 5 loten heeft gekocht één hoofdprijs en één troostprijs wint.
2. Volgens een gynaecoloog blijken 6 van de 10 vrouwen, die volgens een bepaalde "thuis-test" zwanger zijn, helemaal niet zwanger te zijn. Volgens de producent van de thuis-test is het resultaat van de test bij niet-zwangere vrouwen in 90% juist en bij zwangere vrouwen in 100% van de gevallen juist.
Bepaal de kans p , dat een willekeurige gebruikster van de test zwanger is, als de beweringen van de gynaecoloog en die van de producent waar zijn. Definieer daartoe eerst relevante gebeurtenissen en geef de gegeven (on)voorwaardelijke kansen in termen van deze gebeurtenissen.
3. De stochastische variabelen X en Y zijn onderling onafhankelijk en beide Poisson verdeeld met parameter $\mu = 2$.
 - a. Bereken $P(X+Y = 3)$
 - b. Bereken $P(X = 0 | X+Y = 3)$
 - c. Bepaal de kansverdeling van X , gegeven $X+Y = 3$.
 - d. Bereken $E(X | X+Y = 3)$
 - e. Geef de definitie van de correlatiecoëfficiënt en bereken $\rho(X, X+Y)$
4. De stochastische variabelen X en Y hebben de simultane kansdichtheid f waarvoor geldt: $f(x, y) = 8xy$, voor $0 \leq x \leq y \leq 1$ en $f(x, y) = 0$, elders.
 - a. Schets het definitiegebied van f in het xy -vlak en laat zien dat de kansdichtheid van Y is: $f_Y(y) = 4y^3$ voor $0 \leq y \leq 1$
 - b. Bereken (m.b.v. a) $E(Y)$ en $\text{var}(Y)$
 - c. Bepaal de kansdichtheid van $Z = \sqrt{Y}$
 - d. Zijn X en Y onderling onafhankelijk? Waarom (niet)?
5. Na een bericht over te veel cafestol in de automatenkoffie heeft de exploitant van koffieautomaten aan de UT, Autobar, een onderzoek laten uitvoeren. Uit dit onderzoek zou blijken dat de norm van 1.5 mg cafestol niet overschreden wordt bij gebruik van de standaardinstelling van de automaten (UT-nieuws 20 maart 2008).

Een studentenvakbond is daardoor niet gerustgesteld omdat bekend is dat veel gebruikers een hogere dosering verkiezen boven de “slappe” standaardinstelling. De studentenvakbond heeft een onafhankelijk instituut cafestol-metingen laten uitvoeren. Daartoe werden willekeurig 25 koppen koffie met maximale dosering getapt uit verschillende UT-automaten. Het gemiddelde cafestol-gehalte was 1.82 mg per kopje en de standaardafwijking in de steekproef was 0.72 mg.

- a. Bepaal een 90%-betrouwbaarheidsinterval voor de standaardafwijking σ van een cafestolmeting in een kop koffie van maximale sterkte.
 - b. Voer een toets uit om na te gaan of met de steekproef van de studentenvakbond aangetoond is dat de norm van “gemiddeld maximaal 1.5 mg cafestol per kopje koffie” overschreden wordt. Geef het kansmodel, de hypothesen, de toetsingsgrootte en zijn verdeling, het besliscriterium met kritieke waarde(n) en je conclusies met $\alpha = 0.05$
 - c. Als de toets onder b. uitgevoerd wordt met een grotere steekproef, wat is dan het (vermoedelijke) effect op het onderscheidend vermogen van de toets?
 - d. Bij het tentamen K&S krijgt een student een kop koffie (van maximale sterkte) geserveerd. Geef met betrouwbaarheid 95% een intervalschatting van het cafestol-gehalte op basis van de meetgegevens.
6. Bij de nieuwe studentenbalie van het Onderwijs Service Centrum is het druk. Op het openingstijdstip staan 25 studenten voor de deur met allerlei vragen en er is één baliedewerker beschikbaar. Uit ervaring weet men dat de bedieningsduur van een willekeurige student die aan de balie komt exponentieel verdeeld is met een verwachte bedieningsduur van 2 minuten.
- a. Geef voor de som van de bedieningsduren de (exacte) verdeling, de verwachtingswaarde en de variantie. Geef daartoe eerst het kansmodel voor deze bedieningsduren waarop je je antwoord baseert.
 - b. Benader de kans dat alle studenten binnen een uur geholpen zijn (aannemende dat de studenten blijven wachten en geen nieuwe studenten in de wachtrij aansluiten).
 - c. Hoe groot is de kans dat binnen 10 minuten precies 7 studenten geholpen zijn?

Normering:

1	2	3				4				5				6			Totaal	
		a	b	c	d	e	a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	
2	3	2	1	1	1	3	2	2	2	2	3	5	1	3	3	2	2	40

Tentamencijfer = $1 + 9 \times (\text{aantal punten})/40$

Eindcijfer = het gemiddelde van het tentamencijfer en de opdrachtcijfers, die hoger zijn dan het tentamencijfer. Elk opdrachtcijfer hoger dan het tentamencijfer telt voor 5% mee.