Kenmerk : TW2008/DWMP/59/ha

Vak : **Grafentheorie**

Vakcode : 152075
Datum : 30 januari 2008
Tijdstip : 13.30-16.30 uur

Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
In dit tentamen wordt met een graaf G steeds een gewone graaf bedoeld (*simple graph*), d.w.z. G heeft geen lussen (*loops*) en twee verschillende punten worden hoogstens door één lijn verbonden.

1. De lijngraaf (*edge graph*) $L(G)$ van een graaf G is de graaf met $V(L(G)) = E(G)$. Twee punten in $L(G)$ zijn verbonden door een lijn als de corresponderende lijnen in G buurlijnen (*adjacent*) zijn.

   (a) [2 pt] Toon aan dat $\varepsilon(L(G)) = \sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$.

   (b) [3 pt] Toon aan dat als G samenhangend is, dan $L(G)$ ook.

2. [4 pt] T is een willekeurige boom met $\nu(T) = k + 1$ en G is een graaf met $\delta(G) \geq k$. Toon aan dat G een deelgraaf bevat die isomorf is met T.

3. Geef voor elk van onderstaande gevallen een voorbeeld van een graaf G die aan de voorwaarden voldoet. Vermeld bij elk voorbeeld de waarden van κ, κ' en δ.

   (a) [1 pt] $\kappa(G) = \kappa'(G) = \delta(G)$.

   (b) [1 pt] $\kappa(G) < \kappa'(G) = \delta(G)$.

   (c) [1 pt] $\kappa(G) = \kappa'(G) < \delta(G)$.

   (d) [2 pt] $\kappa(G) < \kappa'(G) < \delta(G)$.

4. [4 pt] Toon aan dat de k-dimensionale kubusgraaf (k-*cube*) Q_k Hamiltoniaans is ($k \geq 2$).

5. [5 pt] Laat $k \geq 2$. Laat G een graaf zijn zo dat elke lijn in G incident is met precies één punt van graad $\geq k$.
   Toon aan dat G een matching heeft die alle punten van graad $\geq k$ verzadigt.

6. [4 pt] G is een 3-reguliere Hamiltoniaanse graaf. Toon aan dat $\chi'(G) = 3$.

7. [5 pt] G is een graaf. Toon aan dat $\chi(G) \cdot \chi(G^c) \geq \nu$.

Z.O.Z

8. [4 pt]

N is een netwerk met bron (*source*) x en put (*sink*) y. Voor elk tussenpunt (*intermediate vertex*) v is een getal $m(v) \in Z^+$ gegeven ($m(v)$ is de capaciteit van het punt v). Leg uit hoe men een maximale stroom f in dit netwerk kan vinden die voldoet aan: $f^-(v) \leq m(v)$ voor alle $v \in V - \{x, y\}$.

Hint: pas het labelings-algoritme van Ford en Fulkerson toe op een aangepast netwerk.

Totaal: 36 + 4 = 40 punten