

Algoritmen, Datastructuren en Complexiteit (214020 en 214025)

Bij dit tentamen mag het boek van Baase en Van Gelder worden gebruikt, evenals een uitdraai van de hoorcollegesheets (dit alles zonder eigen aantekeningen).

Bij de opgaven waar om een algoritme wordt gevraagd, geeft u de pseudocode van uw oplossing en een beknopte maar duidelijke uitleg van de werking. Algoritmes zonder duidelijke uitleg worden niet in beschouwing genomen.

Uitspraken die u doet in antwoord op gestelde vragen moeten nauwkeurig worden beargumenteerd.

Er zijn 5 opgaven, waarmee 90 punten behaald kunnen worden. Het tentamenresultaat is (het aantal behaalde punten gedeeld door 10) plus 1.

Vermeld uw naam en de afkorting ADC op ieder los blad. Vermeld ook de werkcollegeleider waar u dit jaar bij was ingedeeld en geef expliciet aan of u beide huiswerkopgaven gemaakt hebt.

Veel succes!

Opgave 1

15 pt

Beschouw het volgende sorteeralgoritme dat van een rij A van integers het segment $A[i, \dots, j]$ sorteert waarbij $1 \leq i \leq j$:

```
void sort (int [] A, int i, j) {  
    if (A[i] > A[j]) swap (A[i], A[j]); // wissel A[i] en A[j] om  
    if (i+1 >= j) return;  
    int k = floor ((j-i+1) / 3); // floor = naar beneden afronden  
    sort (A, i, j-k);  
    sort (A, i+k, j);  
    sort (A, i, j-k);  
}
```

Gevraagd:

1. Bepaal de asymptotische ordegraote van de worst-case tijdscomplexiteit van *sort* om $n > 0$ getallen te sorteren. Neem als basisoperatie een vergelijking tussen elementen in A .
2. Onder welke omstandigheden zou u *sort* prefereren als sorteeralgoritme boven quicksort, insertion sort, mergesort en heapsort?

$$\log_3 = 1.585$$

Opgave 2

20 pt

Gegeven een binaire zoekboom waarbij alle keys (positieve getallen) uniek zijn. Geef een algoritme die, met als invoer een node uit de boom met key k , oplevert de node met de grootste waarde kleiner dan k (en nil als er niet zo'n node is).

Opgave 3

20 pt

Een 4-clique is een deelgraaf met 4 vertices die compleet is, dus edges tussen elke twee vertices. Gegeven een ongerichte graaf in adjacency matrix representatie met n vertices. Geef een algoritme dat in polynomiale tijd bepaalt of deze graaf een 4-clique heeft. Hint: wat is het aantal deelverzamelingen van $1..n$ met 4 elementen?

Opgave 4

25 pt

Beschouw het volgende hinkelspel. Het spel wordt gespeeld op n bij n vierkante stoeptegels. Op elke stoeptegel ligt een aantal knikkers. Je begint op de stoeptegel linksonder, en je mag steeds een tegel naar boven of naar rechts hinkelen. Uiteindelijk moet je op de stoeptegel rechtsboven aankomen. Op elke stoeptegel die je passeert mag je de knikkers pakken; het doel is een hinkelroute te bepalen waarbij je zoveel mogelijk knikkers verzamelt.

1. Geef een recurrente betrekking voor het maximum aantal gewonnen knikkers bij aankomst op de stoeptegel met coördinaten (i, j) .
2. Geef een algoritme om te bepalen hoeveel knikkers je maximaal kunt winnen. De complexiteit mag niet slechter zijn dan kwadratisch in n .

Opgave 5

10 pt

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar of onwaar zijn, en motiveer je antwoord.

1. Als $T(n)$ wordt gekarakteriseerd door $2T(\frac{n}{2}) - 32T(\frac{n}{3}) = n$, en $T(0) = T(1) = 1$, dan geldt $T(n) \in \Theta(n \log n)$.
2. Laat een rij van 1000 elementen gesorteerd zijn op de kans waarmee de afzonderlijke elementen gezocht zullen worden. Het element met de hoogste kans staat vooraan, het element met de laagste kans staat achteraan. Er wordt alleen gezocht naar elementen die in de rij voorkomen. Zelfs als de kans dat het eerste element gezocht wordt 99% is, is de gemiddelde tijdscomplexiteit (gemeten in het aantal vergelijkingen) van een linear search in de rij slechter dan die van een binary search in een kopie van de rij die op de waarde van de zoek sleutels gesorteerd is.
3. Laat T een binaire zoekboom zijn met n knopen, waarin de stijgende rij waarden x_1, \dots, x_n is opgeslagen. Als de knoop N waarin zich x_{i+1} bevindt, dichterbij de wortel van de boom ligt dan de knoop M met x_i , dan is M het rechterkind van zijn ouder.

4. Als het bin packing beslisprobleem in polynomiale tijd kan worden opgelost, dan kan de optimale hoeveelheid bins in polynomiale tijd worden gevonden.
5. Als $P=NP$, dan bestaat er een polynomiale reductie van elk probleem in P naar het Hamilton cycle probleem.