Uitwerking Tentamen K&S voor INF en TEL (153008), donderdag 7 april 2005.

1. Als de gebeurtenissen $\boldsymbol{A}$ = "pc is van **A**-kwaliteit" en G = "pc is **G**oedgekeurd" worden gedefinieerd, dan is gegeven: $P(\overline{A})= 0.05$, $P(\overline{G}\,|A) = 0.01$ en $P(G|\overline{A})= 0.04$,
en dus: $P(A) = 0.95$, $P(G \mid A) = 0.99$ en $P(\overline{G} \mid \overline{A})= 0.96$
Gevraagd is de kans $P(A \mid \overline{G})$
$$P(A \mid \overline{G}) = \frac{P(A \text{ en } \overline{G})}{P(\overline{G})} = \frac{P(\overline{G} \mid A)P(A)}{P(\overline{G} \mid A)P(A) + P(\overline{G} \mid \overline{A})P(\overline{A})} = \frac{0.95\times 0.01}{0.95\times 0.01 + 096\times 0.04} = \frac{19}{115} \approx 16.5\%$$

2.
a. Dit is de kans op 0 successen bij 35 Bernoulli experimenten met succeskans 0.1, dus 0.9^{35} = 0.025.
b. De kansverdeling van X is $B(35,0.1)$
De kansverdeling van $X + Y$ is $B(35,0.2)$.
c. $\text{var}(X) = 35 \times 0.1 \times 0.9 = 3.15$;
$\text{var}(X + Y) = 35 \times 0.2 \times 0.8 = 5.6$.
d. $\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\,\text{cov}(X, Y)$ en dus geldt:
$\text{cov}(X, Y) = ½\,\{\text{var}(X + Y) – \text{var}(X) – \text{var}(Y)\} = ½\,\{5.6 – 3.15 – 3.15\} = – 0.35$.
Er geldt $\rho(X,Y) = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\times \text{var}(Y)}}$.
Derhalve is $\rho(X,Y) = \dfrac{-0.35}{\sqrt{3.15\times 3.15}} = -0.111$
e. $P(X = 4 \mid X+Y = 10)$
$$= \frac{P(X = 4 \text{ en } X+Y=10)}{P(X+Y=10)} = \frac{P(X = 4 \text{ en } Y=6)}{P(X+Y=10)} = \frac{\frac{35!}{4!\cdot 6!\cdot 25!}0.1^{4+6}0.8^{25}}{\frac{35!}{10!\cdot 25!}0.2^{10}0.8^{25}} = \binom{10}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{10}$$
(X is, gegeven X+Y=10, blijkbaar B(10, ½)-verdeeld)

3.
a. $E(X)= \lambda^{-1} = 4$ dus $\lambda=1/4$
$P(X > 8) = \int_8^\infty f_X(x)dx = \int_8^\infty \frac{1}{4}e^{-x/4}dx = -e^{-x/4}\Big|_{x=8}^{x=\infty} = e^{-2} \approx 13.5\%$
b. $F_Y(y) = P(Y\leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2)$ voor $y \geq 0$
$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = 2y\, f_X(y^2)$ voor $y \geq 0$
Dus $f_Y(y) = ½\, y\, e^{-\frac{1}{4}y^2}$, voor $y \geq 0$ (en $f_Y(y) = 0$ voor $y < 0$)
c. $f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x)\, f_{X_2}(z-x)dx = \int_{x=0}^{x=z} \frac{1}{4}e^{-x/4}\frac{1}{4}e^{-(z-x)/4}dx = \int_{x=0}^{x=z}\frac{1}{16}e^{-z/4}dx = \frac{1}{16}x\,e^{-z/4}\Big|_{x=0}^{x=z} = \frac{1}{16}z\,e^{-z/4}$
voor $z \geq 0$ (en $f_Z(z) = 0$ voor $z < 0$)
d. Noem $S = \sum_{i=1}^{25} X_i$, dan is $E(S) = nE(X) = n\frac{1}{\lambda} = 25\times 4 = 100$ en
$\text{var}(S) = n\,\text{var}(X) = n\frac{1}{\lambda^2} = 400$.

Dus S is volgens de CLS bij benadering $N(100, 400)$-verdeeld:

$$P(S < 90) = P(\frac{S-100}{\sqrt{400}} > \frac{90-100}{20}) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1\text{- } 0.6915 = 30.85\%$$

4.

a. $\overline{X}$ is N(μ, σ^2/n)-verdeeld (met n = 25)

Omdat $\overline{X}$ een zuivere schatter is, is de verwachte kwadratische fout: E($\overline{X}$ -μ)^2 = var($\overline{X}$)= $\sigma^2/25$

b. $\hat{\mu} = \overline{x} = 120$ en

$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} s^2 = \frac{24}{25} \times 121$ (= 116.16)

De m.a. schatting van P(X >140) is $P(\frac{X - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} > \frac{140 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}) = 1 - \Phi\left(\frac{140-120}{\sqrt{116.16}}\right) \approx 1 - \Phi(1.86) \approx 3.14\%$

c. (Modelveronderstellingen onafhankelijkheid en normaliteit zijn gegeven)

95%-BI(μ)= $(\overline{x} - c\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + c\frac{s}{\sqrt{n}})$,

waarin n = 25, $\overline{x} = 120$, s^2 = 121 en c uit de t_{25-1}–tabel, zodat $P(T_{24} < c)$= 0.975 , dus c = 2.06

95%-BI(μ) = $(\overline{x} - c\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + c\frac{s}{\sqrt{n}}) \approx (115.5, 124.5)$

d. 95%-BI(σ)= $(\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{c_2}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{c_1}}) \approx (8.6, 15.3)$.

Hierin zijn n = 25, s^2 = 121 en

c_1= 12.4 en c_2= 39.4 zodat $P(\chi^2_{24} \leq c_1) = 0.025$ en $P(\chi^2_{24} \leq c_2) = 0.975$.

e. Toets $H_0 : \mu = 115$ tegen $H_1 : \mu > 115$ (met α = 0.05).

Toetsingsgrootheid T = $\frac{\overline{X} - 115}{S / \sqrt{25}}$ is onder H_0 t_{24}-verdeeld.

Waargenomen waarde: t = $\frac{120-115}{11/\sqrt{25}} \approx 2.27$

Rechtseenzijdig Kritieke Gebied : T ≥ c, Zodat P(T ≥ c|H_0)= 0.05 dus c = 1.71

t = 2.27 ligt in het KG dus H_0 verwerpen: met onbetrouwbaarheid van 5% is statistisch aangetoond dat het gemiddeld IQ van technische studenten hoger is dan 115.

Beslissing met (rechter)overschrijdingskans P(T ≥ 2.27) < 2.5% < 5% = α,
dus H_0 verwerpen. (zie de t_{24}-tabel: P(T_{24} ≥ 2.06) = 2.5%)