

Kenmerk : TW2013/DWMP/077/ha

Vak : **Calculus II voor TI**

Vakcode : 191521020

Datum : 28 januari 2013

Tijdstip : 08.45-11.45 uur

**Alle antwoorden dienen gemotiveerd te worden.
Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.**

1. (a) [3 pt] Laat $p > 1$. Bewijs met behulp van de integraaltest dat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergent is (controleer ook de voorwaarden van de integraaltest!).
- (b) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 - n^2 + 2}}{2n^2 + \sqrt{n}}$ convergent of divergent is.
- (c) [2 pt] Onderzoek of de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2 - n}$ absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent is.
2. (a) [4 pt] Bepaal het convergentie-interval van de machtreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(3x+1)^n}{n^2+1}$.
- (b) [3 pt] Geef een machtreeksrepresentatie van de integraal $\int \frac{\ln(1+3x^2)}{x} dx$. Geef tevens de convergentiestraal van deze machtreeks.
Hint: gebruik de Taylorreeks $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ ($x \in (-1, 1)$).
3. De functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door: $f(x, y) = \frac{2y}{x+y^2}$.
- (a) [1 pt] Maak een duidelijke schets van het definitiegebied (*domain*) van f .
- (b) [2 pt] Teken in één plaatje de niveaукrommen (*level curves*) $f(x, y) = c$, voor $c = -1$, $c = 0$ en $c = 1$.
- (c) [2 pt] Bepaal de partiële afgeleiden van f .
- (d) [2 pt] Bepaal de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(-3, 1, -1)$.

Z.O.Z

- (e) [2 pt] Bepaal een eenheidsvector \mathbf{u} waarvoor de richtingsafgeleide $D_{\mathbf{u}}f(-3, 1)$ maximaal is en bepaal voor deze \mathbf{u} de waarde van $D_{\mathbf{u}}f(-3, 1)$.
- (f) [1 pt] Er bestaat een verband tussen de vector \mathbf{u} uit onderdeel (e) en één van de niveaokrommen uit onderdeel (b). Welke niveaokromme is dit en wat is het verband?
- (g) [2 pt] Bepaal met behulp van de kettingregel voor functies van twee variabelen $\frac{df}{dt}(1)$ als: $x(t) = \ln t$ en $y(t) = \sqrt{t}$.

4. [5 pt]

De functie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven door: $f(x, y, z) = xy + z^2$. Bepaal de grootste en de kleinste waarde van f onder de nevenvoorwaarden $x - y = 0$ en $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5. Gegeven is de integraal $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx dy$.

- (a) [1 pt] Maak een duidelijke schets van het integratiegebied.
- (b) [4 pt] Bereken de integraal door verwisseling van de integratievolgorde.

Totaal: $36 + 4 = 40$ punten