Kenmerk : Leibniz/toetsen/Exam-MathB1-1415

Course : **Mathematics B1 (Leibniz)**

Date : October 24, 2014
Time : 13.45 – 15.45 hrs

Motivate all your answers.
The use of electronic devices is not allowed.

1. [3 pt] Solve the following initial value problem

$$\begin{cases} y' + 3x^2 y = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

2. Define $z = \dfrac{\sqrt{2}\,i}{1-i}$.

   (a) [2 pt] Find the modulus (absolute value) and the argument of z.

   (b) [1 pt] Does there exist a positive n, i.e., $n \in \mathbb{N}$, such that $z^n = i$? If yes, determine the smallest.

3. [1 pt] Prove that all $z \in \mathbb{C}$ satisfy $|z| = |\overline{z}|$.

4. [5 pt] Find the real valued function y which solves the second order differential equation

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 13e^x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

5. Define the vectors $\mathbf{u} = \langle 1, -1, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2, -3 \rangle$, and $\mathbf{w} = \langle 1, 3, -5 \rangle$.

   (a) [2 pt] Find $\mathbf{q} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

   (b) [1 pt] Determine a non-zero vector orthogonal to $\mathbf{q}$ and $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

6. Given are the point $P(1,2,0)$ and the vector $\mathbf{r} = \langle 1, 1, -1 \rangle$.

(a) [1 pt] Determine the line $\ell \in \mathbb{R}^3$ going through P parallel to $\mathbf{r}$.

(b) [2 pt] Is there a point on the line ℓ with distance 1 to the origin? If yes, determine all points with this property.

7. Let y satisfy the differential equation equation

$$y' = 4y^2 + y. \tag{1}$$

(a) [2 pt] Show that $z = \dfrac{1}{y}$ satisfies a differential equation of the form

$$z' = \alpha z + \beta$$

and determine the constants α and β.

(b) [2 pt] Find the general solution of the differential equation in item (a), and use that to determine the solutions y of (1).

Remark: If you were not able to solve item (a), then determine the general solution of

$$z' = -3z + 33.$$

Total: 22 points

Vak	:	**Mathematics B1 (Leibniz)**
Datum	:	24 oktober 2014
Tijd	:	13.45 – 15.45 uur

Motiveer al uw antwoorden.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.

1. [3 pt] Los het volgende beginwaardenprobleem op

$$\begin{cases} y' + 3x^2 y = 0, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

2. Definieer $z = \dfrac{\sqrt{2}\, i}{1-i}$.

   (a) [2 pt] Bepaal de modulus (absolute waarde) en het argument van z.

   (b) [1 pt] Bestaat er een positief geheel getal n, d.w.z. $n \in \mathbb{N}$, zodat $z^n = i$? Zo ja, bepaal de kleinste waarde voor n waarvoor $z^n = i$.

3. [1 pt] Bewijs dat voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt: $|z| = |\overline{z}|$.

4. [5 pt] Bepaal de reëel-waardige functie y die de oplossing is van de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 13e^x, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

5. Defineer de vectoren $\mathbf{u} = \langle 1, -1, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2, -3 \rangle$, en $\mathbf{w} = \langle 1, 3, -5 \rangle$.

   (a) [2 pt] Bereken $\mathbf{q} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

   (b) [1 pt] Bepaal een niet-nul vector die loodrecht staat op $\mathbf{q}$ en $\mathbf{u} \times \mathbf{w}$.

6. Gegeven zijn het punt $P(1,2,0)$ en de vector $\mathbf{r} = \langle 1,1,-1 \rangle$.

(a) [1 pt] Bepaal de lijn $\ell \in \mathbb{R}^3$ die door P gaat en die evenwijdig is aan $\mathbf{r}$.

(b) [2 pt] Bestaat er een punt op de lijn ℓ met afstand 1 tot de oorsprong? Zo ja, bepaal alle punten met deze eigenschap.

7. Stel y voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$y' = 4y^2 + y. \tag{1}$$

(a) [2 pt] Toon aan dat $z = \dfrac{1}{y}$ voldoet aan een differentiaalvergelijking van de vorm

$$z' = \alpha z + \beta$$

en bepaal de constanten α en β.

(b) [2 pt] Bepaal de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking in onderdeel (a), en gebruik dit om de oplossingen y van (1) te bepalen.

Opmerking: Als je onderdeel (a) niet hebt kunnen oplossen, bepaal dan de algemene oplossing van

$$z' = -3z + 33.$$

Totaal: 22 punten