Vak : **Discrete Wiskunde voor Technische Informatica**
Datum : 21 Oktober 2014
Tijd : 10.45-12.30 uur

Motiveer al uw antwoorden.
Het gebruik van electronische apparatuur is niet toegestaan.
Een formuleblad is bijgevoegd.

In deze toets: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

1. Gegeven is een universum $\mathcal{U}$ en verzamelingen $A, B \subseteq \mathcal{U}$.
Verder is I een indexverzameling en is, voor elke $i \in I$, $A_i \subseteq \mathcal{U}$ een verzameling.
Geef gekwantificeerde uitdrukkingen voor de volgende beweringen.

(a) [3 pt] $\overline{A} \cap B = \varnothing$.

(b) [3 pt] $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathcal{U}$.

2. [6 pt]
Bewijs de volgende equivalentie door gebruik te maken van de "Laws of Logic".

$$((p \to q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q))) \Longleftrightarrow \neg(p \vee q).$$

3. [6 pt]
Laat A, B en C verzamelingen zijn in een universum $\mathcal{U}$.
Bewijs dat: $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

4. [6 pt]
De rij getallen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ is gegeven door:
$a_1 = 3$, $a_2 = 12$, en voor $n \geq 3$: $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2}$.
Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{Z}^+$ geldt: $a_n \leq \left[\frac{7}{2}\right]^n$.

5. [6 pt]
A en B zijn verzamelingen, $f : A \to B$ is een functie en $A_1, A_2 \subseteq A$.
Bewijs dat als f injectief is, dan $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

6. [6 pt]
Laat $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en laat R de relatie op A zijn gegeven door:

xRy dan en slechts dan als $x^2 - y^2$ is deelbaar door 3.

Toon aan dat R een equivalentierelatie op A is en bepaal de partitie van A die door R wordt geïnduceerd.

Totaal: 36 punten