Uitwerking Tentamen Kansrekening en Statistiek voor INF (191530082), do 12 april 2012

Opgave 1

Noteer A = "aanvraag gehonoreerd" en B = "extra informatie gevraagd" ;

Dan is gegeven: $P(A) = 0.60$, $P(B \mid A) = 0.75$ en $P(B \mid \overline{A}) = 0.40$.

Gevraagd: $P(A \mid B)$.

Er geldt (met de regel van Bayes):

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \times P(A)}{P(B \mid A) \times P(A) + P(B \mid \overline{A}) \times P(\overline{A})} = \frac{0.75 \times 0.60}{0.75 \times 0.60 + 0.40 \times 0.40} = 0.74.$$

Opgave 2

nr. 1-4	nr. 5	nr. 6-10	Totaal
4	1	5	10
↓	↓	↓	↓
2	1	0	3

a. $P(Y=5) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{6}{120} = 0.05$ Schematisch:

(of: $P(Y=5) = \frac{1}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} \times 3$)

b. $P(X=2|Y=5) = \frac{P(X=2 \text{ en } Y=5)}{P(Y=5} = \frac{\frac{2}{120}}{\frac{6}{120}} = \frac{1}{3}$

c. Analoog b vinden we: $P(X=1|Y=5) = \frac{3}{6}$ en $P(X=3|Y=5) = \frac{1}{6}$

Dus $E(X|Y=5) = \sum_x xP(X=x|Y=5) = 1 \times \frac{3}{6} + 2 \times \frac{2}{6} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

Opgave 3

a. $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx = \int_0^1 x^k\, dx = \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{k+1}$

b. $var(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{2+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}$

c. $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(-3\ln(X) \leq y) = P\left(X \geq e^{-\frac{1}{3}y}\right) = 1 - P\left(X \leq e^{-\frac{1}{3}y}\right) = 1 - F_X\left(e^{-\frac{1}{3}y}\right)$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = +\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}y} f_X\left(e^{-\frac{1}{3}y}\right)$

Omdat $f_X(x) = 1$ als $0 \leq x \leq 1$, is $f_X\left(e^{-\frac{1}{3}y}\right) = 1$ als $y \geq 0$, dus:

$f_Y(y) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}y}$, voor $y \geq 0$, dus Y is exponentieel verdeeld met $\lambda = \frac{1}{3}$ en $E(Y) = 1/\lambda = 3$

Opgave 4

a. Schrijf $X_1, \ldots, X_{25}$ voor de bedieningstijden van de klanten 1, . . . , 25.

Omdat $E(X_i) = 2 = \frac{1}{\lambda}$ en $var(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 4$, geldt m.b.v. de Centrale Limiet Stelling dat $\sum_{i=1}^{25} X_i$bij benadering N(25×2, 25×4)-verdeeld is:

$$P\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 60\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 50}{\sqrt{100}} > \frac{60-50}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 15.87\%$$

b. $\varrho\left(X_1, \sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \frac{cov\left(X_1, \sum_{i=1}^{25} X_i\right)}{\sqrt{varX_1}\sqrt{\sum_{i=1}^{25} X_i}}$

Er geldt: $cov\left(X_1, \sum_{i=1}^{25} X_i\right) = cov(X_1, X_1) = var(X_1) = 4$

en $var\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \sum_{i=1}^{25} var(X_i) = 25 \times 4 = 100$.

Dus $\varrho\left(X_1, \sum_{i=1}^{25} X_i\right) = \frac{4}{\sqrt{4}\sqrt{100}} = \frac{1}{5}$

Opgave 5

a. Zij X het aantal toekomstige klanten bij het nieuwe tariefsysteem onder de groep van n willekeurig gekozen personen. Als stochastisch model nemen we: $X \sim B(n, p)$.

Een zuivere schatter van p is X/n.

b. Omdat deze schatter zuiver is, is de verwachte kwadratische fout gelijk aan de variantie. Deze is

$$\text{var}\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{\text{var}(X)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

c. De betreffende kans is 1- P("geen van allen klant) = 1- (1-p)^3.

Deze schatten we met $1-\left(1-\frac{X}{n}\right)^3$

De schatting is dus $1-\left(1-\frac{33}{150}\right)^3 \approx 52.5\%$

d. Formule: $\left(\hat{p}-c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+c\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$

We hebben $\hat{p}=\dfrac{33}{150}, n=150, c=1.96$ (uit de N(0, 1)-tabel zodat P(Z ≤ c) = 0.975).

Dit levert op: $\left(0.22-1.96\sqrt{\frac{0.22\times0.78}{150}}, 0.22+1.96\sqrt{\frac{0.22\times0.78}{150}}\right) \approx (0.154, 0.286)$

Opgave 6

a. We gebruiken de formule $90\%-BI(\mu)=\left(\bar{X}-c\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+c\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$.

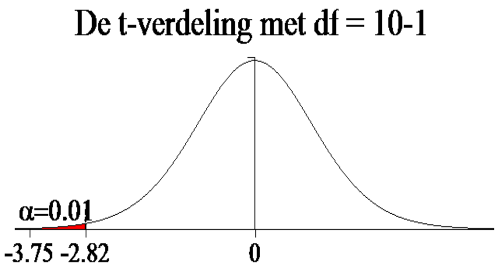
Hierin is $n=10, \bar{x}=80.18$ en $s\approx 2.37$ ($s^2\approx 5.626$), met de rekenmachine.
Verder is c = 1.83, uit de t_9-tabel zodat $P(T_9 \le c) = 0.95$

$90\%-BI(\mu)=\left(80.18-1.83\times\frac{2.37}{\sqrt{10}}, 80.18+1.83\times\frac{2.37}{\sqrt{10}}\right)\approx(78.8, 81.6)$

b. $90\%-BI(\sigma^2)=\left(\frac{(n-1)S^2}{c_2}, \frac{(n-1)S^2}{c_1}\right)=\left(\frac{9\times5.626}{16.9}, \frac{9\times5.626}{3.33}\right)\approx(3.0, 15.2)$

Hierin is $c_1=3.33$ en $c_2=16.9$, zodat $P(\chi_9^2\le c_1)=P(\chi_9^2\ge c_2)=0.05$

c. 1. Model: de CO_2-uitstoten $X_1, \ldots, X_{10}$ zijn o.o. en N(μ, σ^2) –verdeeld (onbekende μ en σ^2)
2. We toetsen H_0: μ = 83 tegen H_1: μ < 83 met α = 0.01
3. Toetsingsgrootheid: $T=\frac{\bar{X}-83}{S/\sqrt{10}}$ ~ t_9-verdeeld onder H_0.
4. Waargenomen waarde $t=\frac{80.18-83}{2.37/\sqrt{10}}\approx -3.75$
5. Links eenzijdig kritiek gebied: verwerp H_0 als $T \le -2.82$ (omdat $P(T\ge 2.82)=0.01=\alpha$)
6. -3.75 ligt in het kritieke gebied dus H_0 verwerpen.
7. Met een onbetrouwbaarheid van 1% is aangetoond dat de motor aan de nieuwe CO_2-norm voldoet.



(Beslissing met de overschrijdingskans $P(T\le -3.75)=P(T\ge 3.75)$: deze ligt volgens de t_9-tabel tussen 0.1% en 0.25% en is dus kleiner dan $1\%=\alpha$, dus H_0 verwerpen)