Universiteit Twente
Afdeling Informatica, Faculteit EWI
27 augustus 2008, 9:00 – 12:30 uur

Studiejaar 2007-2008
Kwartiel 4
Tentamen

Inleiding Logica
(211112)

Gebruik van studiemateriaal bij het tentamen is toegestaan. Inleveren van werk dat niet geheel zelf is gemaakt (er is afgekeken, er zijn briefjes doorgegeven, er is met elektronische hulpmiddelen draadloos advies ingewonnen, of vergelijkbare acties) is fraude.

Uw antwoord op de gestelde vragen moet onderbouwd worden met een duidelijke motivering. Het ontbreken van een toelichting is nadelig van invloed op het aantal te behalen punten. Dat geldt ook voor het geven van een onvolledige of onduidelijke toelichting.

Er zijn totaal 90 punten te behalen. Om het cijfer te bepalen wordt het aantal behaalde punten met 10 vermeerderd. Die som wordt door 10 gedeeld. Het resultaat van die deling wordt afgerond naar een naastgelegen natuurlijke getal.

Het tentamen heeft 7 opgaven, die staan op 5 bladzijden. De opgaven zijn **niet** gerangschikt van gemakkelijk naar moeilijk (en ook niet omgekeerd)

Vermeld op elk blad dat u inlevert uw naam, uw studentnummer en de naam van het vak .

Veel succes!!

Opgave 1 (12 punten).
We beschouwen de volgende redenering:

(1) Sommige parallellogrammen zijn geen rechthoeken
(2) Alle vierkante cirkels zijn rechthoeken
Dus
(3) Sommige parallellogrammen zijn geen vierkante cirkels

(Een parallellogram is een vierhoek waarvan de zijden twee aan twee evenwijdig zijn.)

(a) De beweringen (1) en (2) zijn de premissen van deze redenering. Welke is de minor premiss?
(b) In de redenering komen drie termen voor: vierkante cirkel, rechthoek en parallellogram. Welke is de major term, en welke is de middle term?
(c) Wat is uw oordeel over de waarheid van de beweringen (1), (2) en (3)?
(d) Wat is de mood van de redenering?
(e) Is er een geldig redeneerschema toegepast? Licht uw antwoord toe door een Venn diagram met uitleg, of door te “rekenen” met doorsneden en verschillen van verzamelingen.

Opgave 2 (12 punten).

(a) Voltooi de volgende waarheidstafel voor de drie formules $\neg r \wedge p$, $\neg q$, en $(\neg r \wedge p) \to \neg q$:

p	q	r	$\neg r \wedge p$	$\neg q$	$(\neg r \wedge p) \to \neg q$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

(b) Voltooi de volgende waarheidstafel voor de twee formules $p \to q$, en $(p \to q) \to r$:

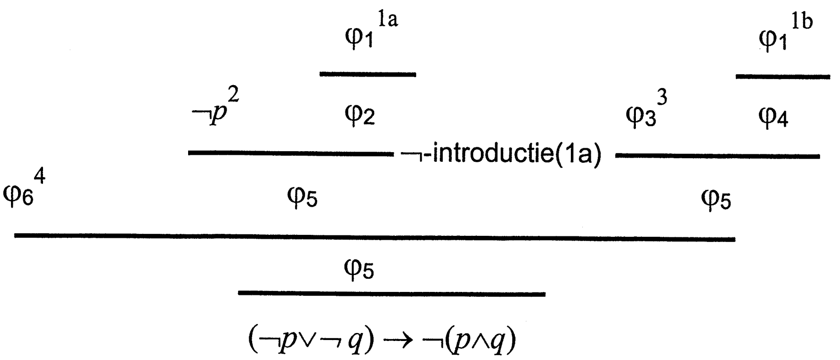
p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \to r$
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0		
1	1	1		

(c) Is de implicatie $((\neg r \wedge p) \to \neg q) \to ((p \to q) \to r)$ een tautologie?
(de resultaten van 2(a) en 2(b) mogen bij de beantwoording gebruikt worden, maar het hoeft niet.)

(d) We definiëren het connectief $\overset{3}{\to}$ als volgt: $p \overset{3}{\to} q =_{\text{def}} ((p \to q) \to q) \to q$.
Geldt nu dat $p \overset{3}{\to} q \equiv p \to q$?

Opgave 3. (15 punten)
Hieronder treft u een schematische afleiding (natuurlijke deductie) voor de zin $(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$.

(a) Vul de ontbrekende formules φ_1 t/m φ_6 correct in. Benoem daarbij alle regeltoepassingen, zoals de al ingevulde $\neg$-introductie (er zijn dus nog 5 regels te benoemen).
Vermeld waar dat van toepassing is de aanname die door de regeltoepassing wordt geschrapt, zoals de al ingevulde (1a) bij de $\neg$-introductie. (Aannamen 1b, 2, 3 en 4 moeten dus nog ergens geschrapt worden.)



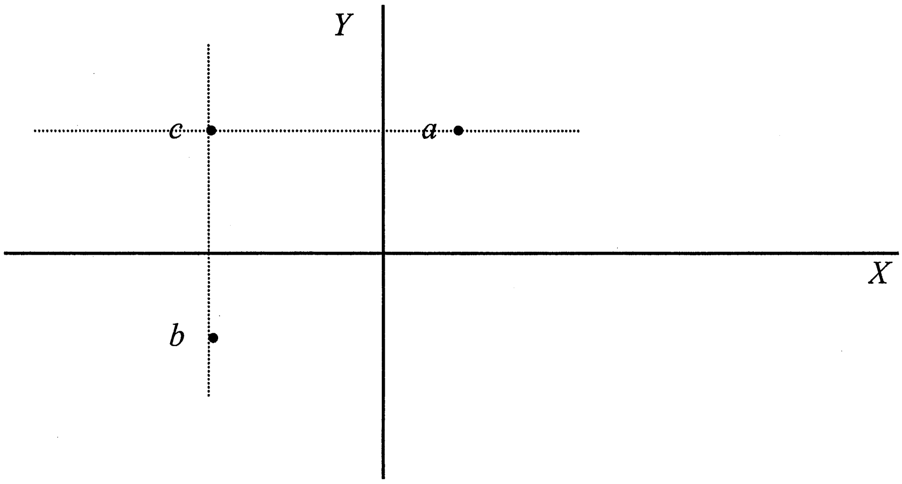
(b) Toon met de tableaumethode aan dat
$\{\exists x\, (A(x) \wedge \neg B(x)), \forall y\, (A(y) \rightarrow C(y))\} \models \exists z\, (C(z) \wedge \neg B(z))$.

(U mag de tableaumethode presenteren als een opeenvolging van transformaties op een verzameling van paren formuleverzamelingen, zoals in het hoorcollege 2007-2008, maar ook op de meer grafische en gebruikelijke manier zoals in het dictaat van Kuper)

Opgave 4 (15 punten).
We beschouwen de volgende predicaatlogische taal $\mathcal{L}$.

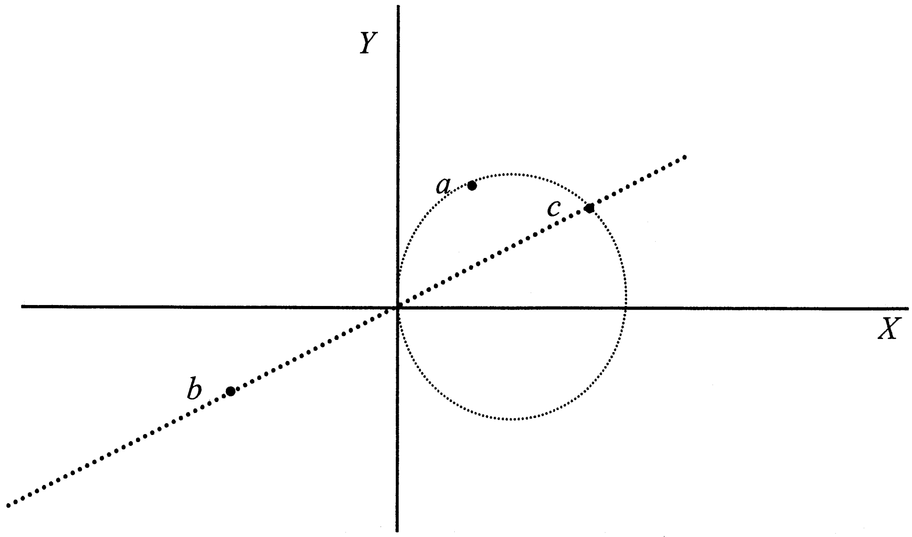
- Er is een oneindige verzameling individuele variabelen;
- Er zijn geen individuele constanten;
- Er zijn twee tweeplaatsige predicaatletters, H en V;
- Er is geen gelijkheid;
- Er zijn geen functiesymbolen.

$\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ zijn twee structuren waarin we de taal $\mathcal{L}$ kunnen interpreteren.
Het domein van beide structuren is het platte vlak.
In structuur $\mathcal{A}$ is de interpretatie van $H(a,b)$: de punten a en b liggen allebei op dezelfde horizontale lijn (hebben dezelfde Y-coördinaat). De interpretatie van $V(a,b)$ is: de punten a en b liggen allebei op dezelfde verticale lijn (hebben dezelfde X-coördinaat).



Voorbeeld: in het plaatje staan a en b **niet** in de relatie H tot elkaar, maar a en c wel. Tussen de punten b en c bestaat de relatie V, maar tussen a en c **niet**.

In structuur $\mathcal{B}$ is de interpretatie van $H(a,b)$: het punt b ligt op de lijn door de oorsprong en a. De interpretatie van $V(a,b)$ is: er is een cirkel waarop a, b en de oorsprong alle drie liggen.



Voorbeeld: in het plaatje staan a en b **niet** in de relatie H tot elkaar, maar b en c wel. Tussen de punten b en c bestaat de relatie V **niet**, maar tussen a en c wel.

(a) Bewijs of weerleg: $\mathcal{A} \models \forall x \forall y \forall z\ ((H(x,y) \wedge H(y,z)) \rightarrow H(x,z))$?
(b) Bewijs of weerleg: $\mathcal{B} \models \forall x \forall y \forall z\ ((V(x,y) \wedge V(y,z)) \rightarrow V(x,z))$?
(c) Voor welke structuur (of structuren) $\mathcal{X} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ geldt $\mathcal{X} \models \exists x \exists y\ (\neg H(x,y) \wedge \neg V(x,y))$?
(d) Voor welke structuur (of structuren) $\mathcal{X} \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ geldt $\mathcal{X} \models \exists x \forall y\ (H(x,y) \wedge V(x,y))$?

(Misschien goed om even in de herinnering te roepen: door drie punten die niet op 1 lijn liggen, gaat een cirkel)

Bij ieder 2-plaatsig predicaat A hoort de verzameling formules

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_A = \{ & \forall x\, A(x,x),\ \forall x \forall y\ (A(x,y) \rightarrow A(y,x)),\\ & \forall x \forall y \forall z\ ((A(x,y) \wedge A(y,z)) \rightarrow A(x,z))\}.\end{aligned}$$

(Voor de opgave is het niet van belang dit te weten, maar deze drie formules drukken uit dat A een equivalentierelatie is.)

(e) Beschrijf een minimale deelstructuur structuur $\mathcal{C}$ van $\mathcal{A}$ (d.w.z. een structuur met zo min mogelijk punten in het domein) met de volgende eigenschappen:
$\mathcal{C} \models \mathrm{E}_H$
$\mathcal{C} \models \mathrm{E}_V$
$\mathcal{C} \models \exists x \exists y\ (\neg H(x,y) \wedge \neg V(x,y))$
$\mathcal{C} \models \forall x \forall y \exists z\ (H(x,z) \wedge V(z,y))$?

Opgave 5 (15 punten).
In de taal van de Peano rekenkunde kunnen we een formule $\varphi(x)$ schrijven die het volgende uitdrukt:

PA $\vdash \neg\chi$, waarbij χ de zin is gecodeerd door x

Veronderstel nu dat er een $\mathbf{n}$ bestaat, d.w.z. een term $S(\ldots S(0)\ldots)$ met n voorkomens van de opvolgerfunctie S, waarvoor het volgende geldt:

$\mathbf{n}$ codeert een zin ψ die equivalent is aan $\varphi(\mathbf{n})$

Geef een analyse van de twee volgende kwesties.

(a) Is de zin ψ gecodeerd door $\mathbf{n}$ waar (in $\mathbb{N}$)?

(b) Als ψ de zin is gecodeerd door $\mathbf{n}$, is $\neg\psi$ dan afleidbaar (in PA)?

De geformuleerde veronderstelling over het bestaan van $\mathbf{n}$ is correct, hij volgt direct uit een bekend lemma

(c) Geef de naam en de (precieze) formulering van dit lemma.

Opgave 6 (6 punten).
Een onbekende dichter dichtte:

Ware woorden maken
ware zinnen
maken ware poëzie.
Niet waar?
Ach…
Geen zin is waar
in dit gedicht!

Over de litteraire kwaliteiten van dit gedicht zullen we niet oordelen. We zijn geïnteresseerd in een logische analyse. Het gedicht bevat naast de vraag “Niet waar?” en de verzuchting “Ach…” twee zinnen p en q:

p = Ware woorden maken ware zinnen maken ware poëzie.

q = Geen zin is waar in dit gedicht!

Geef een gemotiveerd oordeel over de mogelijke waarheid of onwaarheid van p en q.

Opgave 7 (15 punten).
Γ is een verzameling predicaatlogische formules. φ en ψ zijn formules die niet in Γ voorkomen.

Onderdeel 7.1
Bewijs of weerleg de volgende beweringen

(a): als $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ consistent is, dan is $\Gamma \cup \{\varphi\rightarrow\psi\}$ ook consistent.

(b) als $\Gamma \vdash \varphi$ dan is $\Gamma \cup \{\varphi\}$ consistent.

Onderdeel 7.2
We veronderstellen het bestaan van een afleidingsmethode die een goed alternatief is voor natuurlijke deductie. We schrijven $\Gamma \succ \varphi$ als φ op deze alternatieve wijze afleidbaar is uit Γ. Ook voor deze alternatieve afleidingswijze geldt de volledigheidsstelling.
Bewijs of weerleg de volgende beweringen

(c) Als $\Gamma \succ \varphi$ en $\{\varphi\} \succ \psi$ dan $\Gamma \succ \psi$.

(d) Als $\Gamma \succ \neg\psi \rightarrow \varphi$ dan $\Gamma \succ \varphi$ of $\Gamma \succ \psi$.