

Algoritmen, Datastructuren en Complexiteit (214020 en 214025)

Bij dit tentamen mag het boek van Baase en Van Gelder worden gebruikt, evenals een uitdraai van de hoorcollegesheets (dit alles zonder eigen aantekeningen).

Bij de opgaven waar om een algoritme wordt gevraagd, geeft u de pseudocode van uw oplossing en een beknopte maar duidelijke uitleg van de werking. Algoritmes zonder duidelijke uitleg worden niet in beschouwing genomen.

Uitspraken die u doet in antwoord op gestelde vragen moeten nauwkeurig worden beargumenteerd.

Er zijn 5 opgaven, waarmee 90 punten behaald kunnen worden. Het tentamenresultaat is (het aantal behaalde punten gedeeld door 10) plus 1.

Vermeld uw naam en de afkorting ADC op ieder los blad. Vermeld ook de werkcollegeleider waar u dit jaar bij was ingedeeld en geef expliciet aan of u beide huiswerkopgaven gemaakt hebt.

Veel succes!

Opgave 1

15 pt

1. Gegeven een integer array a ter lengte $n = 2^k$ voor een $k > 0$.
 - (a) Geef een algoritme dat het minimum en maximum van a bepaalt door het array één keer te doorlopen. Bepaal het aantal vergelijkingen dat dit algoritme uitvoert.
 - (b) Beschouw het volgende algoritme voor het bepalen van het minimum en maximum:

```
(int, int) minmax( int a[1], ..., a[n])
{ if (n==2)
  { if (a[1]<=a[2]) return (a[1],a[2]); else return (a[2],a[1])
  }
  else { (mn1,mx1) = minmax(a[1], ..., a[n/2]);
        (mn2,mx2) = minmax(a[n/2+1], ..., a[n]);
        return(min(mn1,mn2), max(mx1,mx2));
  }
}
```

Geef een recurrente betrekking voor het aantal vergelijkingen van dit algoritme en bepaal een exacte uitdrukking voor dit aantal.

2. Vind de asymptotische orde van de oplossing van de volgende recurrente betrekking:

$$T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + 8 \text{ voor } n \geq 4, T(n) = 0 \text{ voor } n < 4$$

Opgave 2

20 pt

Geef een algoritme die voor een postorder gesorteerde binaire boom met positieve elementen bepaalt of deze een paar elementen bevat die 1 verschillen.

Opgave 3

20 pt

1. Geef een depth-first search algoritme die kijkt of een gerichte graaf een cykel bevat. De graaf is gegeven als een adjacency list. Wat is de complexiteit van de algoritme?
2. Een graaf heet 40 vertices en 70 edges. De edges kunnen gewichten hebben ter waarde 1, 2 of 3. Beschouw de som van de edges van een minimal spanning subtree van deze graaf. Welk minimum en welk maximum zou de waarde van deze som mogelijk kunnen aannemen?

Opgave 4

25 pt

Beschouw het volgende spel. Het spel wordt gespeeld op een bord met n bij n vierkante vakjes. Je mag een damsteen op een willekeurig vakje op de onderste rij zetten. De damsteen mag je vervolgens steeds diagonaal linksomhoog of rechtsomhoog schuiven, mits je op het bord blijft. Voor elke zet kun je een bepaald positief aantal punten krijgen, die in een tabel gegeven zijn: vanuit vakje (i, j) rechtsomhoog levert $p(i, j, R)$ punten op, linksomhoog levert $p(i, j, L)$ punten op. Uiteindelijk mag je op een willekeurig vakje op de bovenste rij eindigen. Neem aan dat het vakje linksonder de coördinaten $(1, 1)$ heeft.

1. Geef een recurrente betrekking voor het maximaal aantal punten bij aankomst in vakje met coördinaten (i, j) .
2. Geef een algoritme om te bepalen hoeveel punten je maximaal kunt winnen. De complexiteit mag niet slechter zijn dan kwadratisch in n .
3. Geef aan hoe het algoritme zo aangepast kan worden dat ook het beginvak en de winnende zettenreeks geproduceerd kunnen worden.

Opgave 5

10 pt

Geef van de volgende beweringen aan of ze waar of onwaar zijn, en motiveer je antwoord.

1. Beschouw de recurrente betrekking $T(n) = 2 \cdot T(\frac{n}{2}) + 2 \cdot \log n$, $T(1) = 1$. Volgens het Masters theorema geldt $T(n) \in \Theta(\log n)$.
2. Stel je gebruikt gesloten hashing. Als de gemiddelde lijstlengte 5 is, en er 5000 elementen zijn, is de loadfactor kleiner dan 1. nee = 5
3. Als je het travelling salesman probleem polynomiaal zou kunnen reduceren tot een ander probleem, heb je bewezen dat $P = NP$.
4. Als we zouden kunnen bewijzen dat P ongelijk is aan NP , dan hadden we tevens bewezen dat problemen in NP niet efficiënt opgelost kunnen worden.