

Kenmerk : TW2016/DWMP/009/ha

Course : **Mathematics A (Euclid)**

Date : September 23, 2016

Time : 13.45 – 14.45 hrs

Motivate all your answers.
The use of electronic devices is not allowed.

1. [3 pt]

Let, for $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, the intervals $A_k \subseteq \mathbb{R}$ be given by: $A_k = [(-1)^k k, 5k)$.
Determine

$$\bigcap_{k=1}^4 A_k \quad \text{and} \quad \bigcup_{k=1}^4 A_k.$$

2. [3 pt]

Consider the statements

$$\exists x \forall y (x \leq y); \quad \forall x \exists y (x \leq y)$$

Determine for each of these statements if it is true or false in case $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ and in case $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$. Explain your answers!

3. (a) [2 pt]

Let $k \in \mathbb{Z}$. Use the definitions of *even* and *odd* to prove that k cannot be both even and odd.

(b) [3 pt]

Prove with mathematical induction that for all $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

4. In this exercise your answers must be numbers; if your answer contains binomial coefficients or factorials, like $\binom{8}{3}$ or $8!$, you must work these out.

How many selections of four letters from the set $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$ are possible if

(a) [1 pt]

Letters may be chosen more than once (e.g. in *AFBF*).

(b) [1 pt]

Letters may not be chosen more than once and the order in which the letters are selected matters (e.g. *DACF* is considered different from *FCDA*).

(c) [1 pt]

Letters may not be chosen more than once and the order in which the letters are selected does not matter (e.g. *DACF* and *FCDA* are considered identical).

Total: 14 points

Vak : **Mathematics A (Euclides)**

Datum : 23 september 2016

Tijd : 13.45 – 14.45 uur

Motiveer al uw antwoorden.

Het gebruik van elektronische apparatuur is niet toegestaan.

1. [3 pt]

Laat, voor $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, de intervallen $A_k \subseteq \mathbb{R}$ gegeven zijn door: $A_k = [(-1)^k k, 5k)$.

Bepaal

$$\bigcap_{k=1}^4 A_k \quad \text{en} \quad \bigcup_{k=1}^4 A_k.$$

2. [3 pt]

Beschouw de beweringen

$$\exists x \forall y (x \leq y); \quad \forall x \exists y (x \leq y)$$

Bepaal voor elk van deze beweringen of deze waar of onwaar is in het geval $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ en in het geval $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$. Motiveer uw antwoorden!

3. (a) [2 pt]

Laat $k \in \mathbb{Z}$. Gebruik de definities van *even* en *oneven* om te bewijzen dat k niet zowel even als oneven kan zijn.

(b) [3 pt]

Bewijs met volledige inductie dat voor alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

4. In deze opgave moeten uw antwoorden getallen zijn; als uw antwoord binomiaalcoëfficiënten of faculteiten bevat, zoals $\binom{8}{3}$ of $8!$, dient u deze uit te werken. Hoeveel selecties van vier letters uit de verzameling $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$ zijn er mogelijk als

(a) [1 pt] Letters meer dan eens gekozen mogen worden (zoals in $AFBF$).

(b) [1 pt] Letters niet meer dan eens gekozen mogen worden en de volgorde waarin de letters worden gekozen van belang is (bijv. $DACF$ wordt als een andere keuze beschouwd dan $FCDA$).

(c) [1 pt] Letters niet meer dan eens gekozen mogen worden en de volgorde waarin de letters worden gekozen niet van belang is (bijv. $DACF$ en $FCDA$ worden als identiek beschouwd).

Totaal: 14 punten