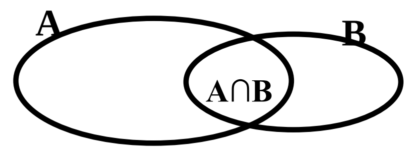
Uitwerking Proeftoets Kansrekening voor INF en BIT (Module 4 - 201300180)



Opgave 1

a. Als A en B disjunct zijn, dan geldt: $P(A \cap B) = 0$,
dus $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.2 + 0.5 = \mathbf{0.7}$

b. Als A en B onafhankelijk zijn, dan is $P(A \cap B) \overset{\text{o.o.}}{=} P(A) \times P(B) = 0.2 \times 0.5 = 0.10$
Dus: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.5 - 0.1 = \mathbf{0.60}$

c. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0.3$,
ofwel: $P(A \cap B) = 0.3 \times P(B) = 0.3 \times 0.5 = 0.15$.
Dus: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.5 - 0.15 = \mathbf{0.55}$

Opgave 2

a. X is binomiaal verdeeld met $n = 10$ en $p = 0.2$: $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.8^{10} = 89.3\%$

b. voor $n = 250$ en $p = 0.01$ kunnen we bij benadering de Poisson verdeling gebruiken met $\lambda = np = 2.5$
Dus $P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0.890 = 11.0\%$

c. voor $n = 400$ en $p = 0.1$ is X bij benadering N(np, $np(1-p)$)- dus N(40, 36)-verdeeld
$P(X < 30) = P(X \leq 29.5)$ (*continuïteitscorrectie*)
$=P\left(\frac{X-40}{\sqrt{36}} \leq \frac{29.5-40}{6}\right) \approx P(Z \leq -1.75) = \frac{1}{2} - P(0 \leq Z \leq 1.75) = \frac{1}{2} - 0.4599 = 4.01\%$

Opgave 3

a. $P(X = 0) = P(X = 2) = 0.3$ en $P(X = 1) = 0.4$
Dus $E(X) = 1$ wegens symmetrie
En $var(X) = E(X^2) - EX^2 = [0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.3] - 1^2 = 0.6$

b. $\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sigma_X \sigma_Y}$
Hierin zijn $EX = EY = 1$ en $\sigma_X = \sigma_Y = \sqrt{0.6}$, omdat X en Y dezelfde verdeling hebben (zie a).
$E(XY) = \sum\sum x \cdot y \cdot P(X = x \text{ en } Y = y) = [1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2] \cdot 0.15 = 1.35$
Dus $\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{1.35 - 1 \cdot 1}{0.6} = \frac{7}{12}$ (≈ 0.58)
Er is een matige positieve correlatie tussen het aantal zieken in de ochtend en de avondploeg.

c. $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 2$ en
$var(X + Y) = var(X) + varY) + 2cov(X,Y) = 0.6 + 0.6 + 2 \cdot 0.35 = 1.9$

d. $P(Y = 0|X = 0) = \frac{P(Y=0 \text{ en } X=0)}{P(Y=0)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$ en evenzo: $P(Y = 1|X = 0) = \frac{1}{3}$
$E(Y|X = 0) = \sum y P(Y = y|X = 0) = 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

Opgave 4

a. $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$, dus $\lambda = 0.5$
$P(X_1 > 3) = \int_3^\infty 0.5e^{-0.5x}dx = -e^{-0.5x}\big|_{x=3}^{\infty} = e^{-1.5} \approx 22.3\%$ en
$P(X_1 > 5 \mid X_1 > 2) = P(X_1 > 3) = 22.3\%$ wegens geheugenloosheid.

b. $P(X_1 > 3 \text{ en } X_2 > 3) \overset{\text{o.o.}}{=} P(X_1 > 3) \cdot P(X_2 > 3) = 0.2231^2 \approx 5.0\%$

c. $f_{X_1+X_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) f_{X_2}(z-x)dx = \int_0^z 0.5e^{-0.5x} \cdot 0.5e^{-0.5(z-x)}dx = \int_0^z 0.25e^{-0.5z}dx$
$= 0.25e^{-0.5z} \cdot x\big|_{x=0}^{x=z} = 0.25ze^{-0.5z}$, voor $z \geq 0$
$P(X_1 + X_2 > 3) = \int_3^\infty 0.25ze^{-0.5z}dz = 0.5z \cdot -e^{-0.5z}\big|_{z=3}^{z\to\infty} + \int_3^\infty 0.5e^{-0.5z}dz$ (partiële integratie)
$= 1.5e^{-1.5} + -e^{-0.5z}\big|_{z=3}^{z\to\infty} = 1.5e^{-1.5} + e^{-1.5} = 2.5e^{-1.5} \approx 55.8\%$

d. $X_1 + X_2 + \cdots + X_{36}$ is volgens de CLS bij benadering $N\left(36 \cdot 2,\ 36 \cdot \frac{1}{0.5^2}\right) -$ verdeeld

$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_{36} > 90) \approx P\left(Z > \frac{90-72}{\sqrt{144}}\right) = 1 - \Phi(1.5) =$ 1- 0.9332 ≈ 6.7%

e. $F_X(x) = P(-2\ln(U) \leq x) = P(U \geq e^{-0.5x}) = 1 - F_U(e^{-0.5x})$

$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = 0.5e^{-0.5x} f_U(e^{-0.5x})$

$0 < e^{-0.5x} < 1$ als $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$: dan is$f_U(e^{-0.5x}) = 1$ en dus $f_X(x) = 0.5e^{-0.5x}$ (anders is $f_X(x) = 0$)

X is dus exponentieel verdeeld met parameter λ = 0.5.

Opgave 5

a. $P(X \leq 0) = P\left(\frac{X-8}{10} \leq \frac{0-8}{10}\right) = P(Z \leq -0.8) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 21.19\%$

b. $P(X \leq c) = P\left(Z \leq \frac{c-8}{10}\right) = \Phi\left(\frac{c-8}{10}\right) = 0.99$, dus $\frac{c-8}{10} = 2.33$, ofwel: $c = 8 + 10 \cdot 2.33 = 31.3$

c. $\overline{X}$ is normaal verdeeld met $\mu_{\overline{X}} = \mu = 8$ en standaardafwijking $\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$

$P(\overline{X} \leq 0) = P\left(Z \leq \frac{0-8}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(2.53) = 1 - 0.9943 = 0.57\%$